

ВЫПУСК

105

Библиотечка КВАНТ



И.Ф. АКУЛИЧ

**КОРОЛЕВСКИЕ
ПРОГУЛКИ**



Б Ю Р О



КВАНТУМ



БИБЛИОТЕЧКА
КВАНТ
ВЫПУСК

105

Приложение к журналу
«Квант» № 1/2008

И.Ф. Акулич

**КОРОЛЕВСКИЕ
ПРОГУЛКИ**



0001610

Москва
2008



УДК 51(02.062)
ББК 22.1
А44

Серия
«Библиотечка «Квант»
основана в 1980 г.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,
С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан (ученый секретарь)

А44 Акулич И.Ф.

Королевские прогулки. — М.: Бюро Квантум, 2008. —
144 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 105. Приложение к
журналу «Квант» № 1/2008.)

ISBN 978-5-85843-072-8

В сборник включены отдельные статьи И.Ф.Акулича, в разные годы публиковавшиеся на страницах журнала «Квант», а также некоторые его новые очерки. Книга написана живым, образным языком, что ставит ее в один ряд с известными произведениями научно-популярного и занимательного жанра. Часть очерков посвящена обсуждению авторских задач олимпиадного уровня, в разное время предлагавшихся читателям «Кванта».

Книга будет полезна школьникам старших классов, преподавателям, а также всем любителям математики.

ББК 22.1

ISBN 978-5-85843-072-8

© Бюро Квантум, 2008

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции	4
ИШАКИ, ФЕРТИНГИ И ТАРАКАНЫ	5
Ишаки в наследство	5
Подозрительные фертинги	8
Лавина для полководца	13
Потомки Янычара	19
Решение ребусов на чашечных весах	22
Ни Лойд, ни Дьюдени...	29
Новая Ханойская башня	36
ПОГОНИ, КРЕПОСТЬ И ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ	42
Почему Партос и Арамис не удержали крепость Бель-Иль?	42
Свинская история	44
Геодезические страдания	50
Полосатое чудо	56
На что похожа цепная линия?	59
ЧИСЛА, ОДНИ ТОЛЬКО ЧИСЛА И НИЧЕГО, КРОМЕ ЧИСЕЛ	61
Стереоблеск	61
Бурсацкое развлечение	65
Хитроумный Иосиф Флавий	73
ЛЯГУШКИ, ДОСКИ И ПАРАДОКСЫ	78
Королевские прогулки	78
Треугольники на шахматной доске	84
Греко-латинские лягушки	93
«Своя игра» и справедливость	99
Не сдавайтесь, мистер Фейнман!	109
Тройное дно тройной дуэли	116
Еще парадоксальней!	125
ДОЖДЬ, ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ И ПРОГРАММИСТЫ	128
Как убежать от дождя?	128
Проблема с центром тяжести, или «Ау, программисты!»	135

Вы держите в руках сборник избранных математических эссе Игоря Федоровича Акулича – давнего автора журнала «Квант», полюбившегося многим читателям.

Сказать, что Игорь Федорович продолжает традиции Льюиса Кэрролла, Мартина Гарднера, Якова Исидоровича Перельмана и других популяризаторов науки, – было бы верно, но не точно. Занимательный сюжет и живое слово присутствуют во многих его миниатюрах, придавая им неповторимый колорит и делая их узнаваемыми на фоне публикаций других авторов. Но, кроме всего прочего, Игорь Федорович – олимпиадник, автор огромного количества задач, на которых «становились на крыло» победители математических олимпиад различного уровня, в том числе и победители конкурсов, проводимых журналом «Квант». На многие вопросы, которые задает Игорь Федорович в статьях этого сборника, до сих пор не получены ответы – поищите их.

Формально название сборнику подарил один из помещенных в него рассказов, но смысл этого названия гораздо глубже. Со времен Евклида известно, что не существует царского, т.е. легкого и безмятежного, пути в математику. Это верно. Однако любой путь в науку сулит поистине царские награды – находки и открытия для тех, кто отважится по нему пойти. Прогуляться по одному из таких увлекательных маршрутов вам и предлагает Игорь Федорович.

В сборник включены отдельные статьи И.Ф. Акулича, в разные годы публиковавшиеся в журнале «Квант», а также некоторые его новые очерки.

ИШАКИ В НАСЛЕДСТВО

Не будем уточнять, при каких обстоятельствах, но как-то в одной чайхане встретились Ходжа Насреддин и знаменитый мудрец и звездочет Гуссейн Гуслия. Среди тем, которые они обсудили, был затронут вопрос о наследстве и наследниках.

До чего же большое дело – дележ наследства! – вздохнул Ходжа Насреддин. – При этом вспыхивают порой такие страсти, по сравнению с которыми великое побоище на бухарском базаре (где тебя угораздило зачем-то переодеться женщиной) покажется мирной и ласковой беседой добрых друзей. Встречал я, помнится, двоих братьев, не поделивших старую облезлую козу. Они настолько упорствовали в своих правах, что каждый не позволял другому даже кормить *свое* животное. Результат печален: коза сдохла, ее шкуру прибрал себе светлейший эмир бухарский, и все имущество братьев пошло на уплату судебных издержек.

– К чему ты все это клонишь? – раздраженно воскликнул Гуссейн Гуслия (напоминание о злосчастном переодевании, виновник которого был хорошо известен, больно задело его). – Я сам был единственным наследником моего отца, а у меня наследников нет...

– Не о тебе речь, славный Гуссейн Гуслия, – так же ележно продолжал Насреддин. – Но как-то в Бухаре одному неглупому человеку пришлось помогать делить наследство, состоящее из одиннадцати ишаков, между тремя братьями. Согласно завещанию, старший брат должен был получить половину всех ишаков, средний – четверть, а младший – шестую часть. Наследники попали в затруднительное положение: ведь 11 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 6. Не рубить же ишаков на части! Тем не менее этот весьма неглупый, как я уже сказал, человек нашел достойный выход из положения. Сумеешь ли сообразить, какой?

Гуссейн Гуслия задумался лишь на мгновение и тут же просиял, как начищенный медный кумган.

– Сумею! – с гордостью провозгласил он. – И ты, порождение шайтана, будешь вынужден резать свинью своей наглости ножом восхищения перед моей мудростью и глубокомыслием.

Упомянутый тобой неглупый человек был все же не умнее меня, и потому я легко могу определить, что он сделал. Он приехал туда на *собственном* ишаке и объявил: «Надеюсь, вы не откажетесь, если к вашим ишакам я добавлю своего и буду делить между вами не 11, а 12 ишаков?» Братья, конечно, согласились – ведь наследство от этого только увеличивалось. Ну, а число 12 прекрасно делится и на 2, и на 4, и на 6, так что старшему досталось $12 : 2 = 6$ ишаков, среднему – $12 : 4 = 3$ ишака, и младшему – $12 : 6 = 2$ ишака, а всего (обрати внимание, презренный!) $6 + 3 + 2 = 11$ ишаков. Т.е. один ишак, как раз тот, на котором приехал этот человек, не достался никому, и на том же ишаке он уехал обратно. Вот так!

– Поразительно! – Насреддин широко раскрыл глаза, изобразив крайнюю степень изумления. – Но почему такое решение привело к успеху? Ведь делил он не наследство, а *больше*, чем наследство, и все равно оказалось, что...

– Сейчас поймешь! – перебил его Гуссейн Гуслия, все больше надуваясь от важности. – Причина в том, что само завещание содержало ошибку. Ведь если братья должны были получить соответственно $1/2$, $1/4$ и $1/6$ части наследства, то всего это составляет $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$ часть наследства, и непонятно, кому должна достаться оставшаяся $1/12$ часть. Именно она и явилась тем самым ишаком, который был сперва добавлен, а потом изъят обратно. Ну, что, готов ли ты оценить по достоинству остроу и гибкость моего ума?

– Готов, но только твою память, почтенный! – улыбнулся Насреддин. – Ибо история эта стара, как мир, и я сам слышал о ней еще в глубоком детстве, когда жил в доме моего приемного отца гончара Шир-Мамеда, мир праху его. Нет сомнения, что и ты узнал о ней из многочисленных бесед с разными людьми, коих ты за свой долгий век повидал немало. Но одно дело знать, и совсем иное – уметь применить свои знания в будущем. Поэтому позволь теперь действительно проверить и остроу, и гибкость, и все прочие достоинства твоего ума на примере случая, произошедшего со мной самим в Коканде, куда я забрел в поисках некоего Агабека, хозяина горного озера...

– Если ты его нашел, я ему не завидую, – ехидно вставил Гуссейн Гуслия.

– И опять ты прав, но речь не о том. Итак, однажды я забрел во двор, привлеченный громкими воплями, и увидел четырех человек, сцепившихся в большой клубок, катавшийся туда-сюда

по земле, усыпанной вырванными из бород клочьями волос. Кое-как успокоив их, я выяснил, что эти четверо – тоже братья, которые таким образом пытаются поделить наследство, состоящее из 25 ишаков. Одному из братьев должна была достаться половина наследства, второму – четвертая часть, третьему – шестая, и четвертому – восьмая часть. Я задумался, как быть, и, поскольку день уже клонился к закату, пообещал прийти завтра, чтобы попробовать разделить наследство в соответствии с завещанием. И как ты думаешь, удалось мне это сделать?

– Нет! – злорадно воскликнул Гуссейн Гуслия. – И никакие попытки приехать, как в предыдущем случае, на своем ишаке, тебе не помогут. Ведь здесь сумма долей, причитающихся братьям, равна $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24}$, а это больше, чем целое.

Приедь ты к ним хоть на дюжине ишаков – все равно при дележе их не хватит! Так что здесь тебе уж точно пришлось признать поражение, клянусь своей бородой!

– Не клянись, уважаемый – борода может еще пригодиться. Когда я приехал к ним утром, и притом все-таки на ишаке, со двора опять был слышен шум. Оказалось, ночью неизвестный злоумышленник взломал дверь сарая и украл одного ишака! Наследство, таким образом, сократилось до 24 ишаков. Погоревав ради приличия некоторое время вместе с братьями, я обратился к ним: «Что поделаешь! Придется делить тех животных, которые остались. Тебе, первый брат, причитается половина, т.е. 12 ишаков. Забирай их и отходи подальше, чтобы не мешать. Тебе, второй, полагается четверть, или 6 ишаков. Тоже забирай и отходи. А тебе, третий, досталась шестая часть – 4 ишака (тоже бери и отходи). Остался последний брат, который должен забрать восьмую часть – 3 ишака. Бери!» «Как же я возьму? – удивился последний брат. – Ведь ишаков-то осталось только два!» «Что, правда два? – поразился я. – Не может быть, пересчитай еще раз! Пересчитал? Все-таки два? О горе мне! Обсчитался! Ладно, забирай моего ишака – пусть это будет мне наказанием за глупую промашку!». Вот как закончилась эта история.

– Значит, ты ошибся! И заплатился за это! – радостно завопил Гуссейн Гуслия. – Ты был вынужден отдать им своего ишака!

– Почему же своего? – спокойно спросил Насреддин. – Я ведь сказал тебе, что ночью братьев обокрали – и я им просто возместил пропажу. Эта кража оказалась очень кстати – как будто сам Аллах помог мне!

– Аллах ли? – Гуссейн Гуслия с подозрением взгляделся в лицо собеседника.

– Ну, пусть не Аллах... Я забыл упомянуть, что еще до Коканда познакомился и сдружился с багдадским вором. Ему ничего не стоило украсть даже пару арабских скакунов из конюшни менялы Рахимбая, а увести ишака из обычного сарая – вообще пустяк. Вот так-то, мудрейший из мудрых: знание ценно своим применением, иначе оно не стоит и четверти таньга!

ПОДОЗРИТЕЛЬНЫЕ ФЕРТИНГИ

– Так о чем я? А? Никто не помнит? Ах, да – о математике, провалиться мне на этом месте! Значит, Вы утверждаете, что математика капиталисту ни к чему? – говорил владелец макаронного заведения Скуперфильд консервному фабриканту Скрягинсу во время перерыва в очередном заседании Большого Бредлама¹. Остальные присутствующие в разговоре не участвовали, но прислушивались к нему не без интереса.

– Конечно, ни к чему! – ответил Скрягинс. – Разве что деньги считать... А что касается всякого там моделирования, оптимизации производственного процесса и прочей дребедени, то у меня своя оптимизация: сырье покупать подешевле, товары продавать подороже, рабочим платить поменьше.

– Да! Это точно! Что касается производственного процесса – Вы совершенно правы! И у меня такая же оптимизация. Но в жизни – в обычной жизни! – математика может очень пригодиться. И даже принести прибыль! Не верите? А я Вам рассказывал историю с четырьмя фертингами²? Нет? Так слушайте! Позвонили мне однажды из банка и говорят, что после какого-то там перерасчета платы за электричество они должны вернуть мне три фертинга. Целых три! Конечно, я помчался в банк. А? Что вы говорите? Почему не на машине? Еще чего! Бензин – штука не бесплатная. А ноги не отвалятся. В банке мне выдали три новеньких блестящих серебряных фертинга, и я пошел домой. И когда я шагал по Кривой улице (я там живу), вдруг слышу крики, стрельбу и всякий прочий шум. В чем дело – не пойму. Потом увидел, что полиция преследует каких-то преступников. Конечно, я отступил подальше – ни с теми, ни с другими связываться, сами понимаете, нежелательно. Сначала пробежали бандиты, на

¹ Подробности см. в романе-сказке Н.Носова «Незнайка на Луне»

² Фертинг – денежная единица на Луне. Один фертинг равнялся 100 сантикам. За 5 сантиков можно было заказать в столовой тарелку каши.

ходу выбрасывая что-то из карманов, затем – полицейские. Когда все стихло, я двинулся домой, но не тут-то было! Распроклятые полицейские очень быстро вернулась, оцепили место погони и долго обшаривали все вокруг – по-видимому, искали то, от чего избавлялись преступники. Пришлось ждать, пока они не убралась. Наконец, дорога освободилась, я пошел дальше и вдруг заметил в траве газона что-то блестящее. И как Вы думаете, что это было? А? Не знаете? Это был серебряный фертинг – точь-в-точь такой, как те, что мне дали в банке. Возможно, его выбросил один из бандитов, или кто-то другой раньше потерял, но мне-то какая разница? Добавив монету к трем полученным в банке, я вернулся домой, а вечером включаю телевизор – и что Вы думаете? Оказывается, те самые преступники, которых гоняла полиция по моей улице, были фальшивомонетчиками! Они изготавливали поддельные фертинги высочайшего качества, совершенно неотличимые от настоящих, и единственное, что могло их выдать – чуть-чуть другой вес. По телевизору, к сожалению, не сообщили, были ли фальшивые монеты легче или тяжелее настоящих, зато заявили, что полиция, возможно, скоро начнет производить обыски, и всякого, у кого обнаружат хотя бы один такой фертинг, будут считать сообщниками тех злоумышленников. Надо было срочно избавляться от фальшивой монеты, но... она лежала у меня в одном кармане с тремя настоящими, и отличить ее я не мог – весов-то у меня нет. Тем более, монета могла быть и настоящая! А? Что вы сказали? Я плохо слышу!

– А Вы пошли бы, да купили что-нибудь на все эти четыре фертинга! – повторил Скрыгинс.

– Да? А если б меня запомнили в магазине, и потом обнаружилось, что среди монет есть фальшивая? Нет уж, надо было как можно быстрее выделить из четырех монет подделку, если, разумеется, она там была! Но как это сделать? Конечно, взвешиванием! Пришлось отправляться к своему соседу – Жадингу. У него весы есть, но он такая жадина, такой скупердядь...

При этих словах окружающие заулыбались. Они хорошо знали и Жадинга, и Скуперфильда, и кто из них скупей – сказать было трудно. В этой области один другому не уступал.

– Жадинг дал мне весы, – продолжал Скуперфильд, не замечая всеобщего веселья, – обычные чашечные весы без гирь. И заявил, что за каждое взвешивание он будет брать с меня по сантику! Представляете – по целому сантику! Жулик! Негодяй! Ворюга! Вымогатель!

Скуперфильд разошелся не на шутку и в сердцах принялся размахивать тростью, так что оказавшимся поближе (в том числе

и Скрягинсу) крепко досталось. С трудом удалось его успокоить и заставить продолжать:

– Да! Так о чем я? А? Никто не помнит? Столько ослов вокруг, и никто не помнит, о чем я говорил? Что? О фертингах? Да, верно – о четырех фертингах, провалиться им на месте! Когда этот бандит Жадинг затребовал с меня такие немыслимые деньги за пользование весами, я стал думать, как выделить фальшивую монету (если она есть) за *наименьшее* число взвешиваний. И сколько это взвешиваний, по-Вашему?

– Ну, трех, видимо, хватит... – стал рассуждать Скрягинс. – Сначала сравнить первую монету со второй, потом вторую с третьей, потом третью с четвертой... Ну и все! Трех взвешиваний точно хватит.

– Значит, три взвешивания? А почему именно три? Может, хватит двух? Или одного?

– Одного-то уж точно не хватит! – заявил Скрягинс.

– Почему Вы так считаете?

– Ну...

– Вот видите – не знаете! А я знаю! И помогла мне это узнать математика! И скажите мне теперь, что она – бесполезная вещь!

– Как же она могла помочь?

– А вот послушайте. У меня 4 монеты. Пронумеруем их. Первая может быть легче или тяжелее остальных. Обозначим эти случаи так: 1Л и 1Т. То же самое возможно и для каждой из остальных монет – еще 6 случаев: 2Л, 2Т и так далее. Наконец, возможен и вариант, когда все монеты – настоящие; обозначим его буквой Н. Таким образом, имеется всего 9 случаев: 1Л, 1Т, 2Л, 2Т, 3Л, 3Т, 4Л, 4Т и Н. Это понятно? Хорошо. Вот я сделал первое взвешивание. Здесь могут быть 3 исхода: или левая чашка перевесила, или правая, или равновесие. Понятно, что каждый из 9 случаев соответствует одному из исходов. И непременно найдется исход, которому соответствуют не меньше трех случаев.

– Почему это вдруг непременно найдется?

– Эх, голова Вы садовая! Да если такого исхода не будет, то, значит, каждому исходу соответствуют не больше двух случаев, и всего случаев не больше $2 \times 3 = 6$. А у нас-то их больше – целых 9! Понятно? То-то же! Когда-нибудь я обобщу этот метод рассуждений и назову его «принципом Скуперфильда»³.

³ На Земле этот метод уже обобщили и называют «принципом Дирихле». Он формулируется так: если N исходам соответствуют не меньше $NK + 1$ случаев, то найдется исход, которому соответствуют не меньше $K + 1$ случаев. Принцип Дирихле легко доказывается «от противного», что и сделал Скуперфильд.

Звучит? Ладно, пойдём дальше. Так как найдется исход, которому соответствует не меньше трех случаев, то если он наступит, я не смогу различить эти случаи между собой – результат-то взвешиваний для них всех один и тот же! Значит, одного взвешивания и вправду не хватит. Но, может быть, хватит двух? А вот здесь-то надо порассуждать тоньше! Если после первого взвешивания одному из исходов соответствует *не меньше четырех* случаев, то нам и второго взвешивания не хватит: ведь если трем исходам второго взвешивания соответствуют четыре случая, то какому-то из этих исходов соответствует не меньше двух случаев! Тот же принцип Скуперфильда – не забыли еще? И потому случись такой исход – потребуется новое взвешивание, уже третье!

– А если... после первого взвешивания каждому исходу соответствуют *ровно три* случая? – неуверенно предположил Скрягинс. – Всего случаев 9, и это как раз...

– Ага, сообразили! – обрадовался Скуперфильд. – То-то и оно: если первым взвешиванием мы сумеем разделить случаи поровну по трем исходам, то это даст нам надежду покончить с проблемой уже вторым взвешиванием! Но как это сделать?

– А что тут сложного? – возразил Скрягинс. – Кладем на каждую чашку весов по одной монете. Тогда если одна из них перевесит...

– А если равновесие? – перебил Скуперфильд, злорадно улыбаясь; его улыбка, правда, больше походила на устрашающую гримасу. – Тогда у Вас останется на подозрении аж пять случаев: 3Л, 3Т, 4Л, 4Т и Н. Попробуйте распознать их за одно оставшееся взвешивание!

– И правда, не выходит... – задумался Скрягинс. – Тогда положим по две монеты. Если равновесие – то все хорошо: фальшивой монеты нет.

– А если неравенство? Получается по 4 случая на каждый исход, какая бы чашка ни перевесила. Ну так что?

– Не знаю... – развел руками Скрягинс. – Других-то способов нет. Нельзя же класть на чашки разное число монет.

– Еще бы! – воскликнул Скуперфильд. – Тогда уж точно чашка с большим числом монет в любом случае перевесит – ведь фальшивая монета ненамного отличается по весу от настоящей. Такое взвешивание не даст Вам *ничего!*

– Значит, двумя взвешиваниями все-таки не обойтись?

– Это Вам не обойтись! – гордо заявил Скуперфильд. – А я обошелся. Еще чего не хватало – лишний сантиметр выкладывать! Да еще Жадингу! Хватит с него и двух!

– Но... каким образом?

– А вот каким! – Скуперфильд вновь жутко улыбнулся, затем полез в карман, достал оттуда серебряный фертинг и покрутил монету перед носом Скрягинса. – Я сделал вот так – и победил!

– Не понимаю.

– Сейчас объясню. Когда, выложив все четыре монеты перед весами, я сообразил, что не годится класть на чашки при первом взвешивании ни по одной, ни по две монеты, я подумал: а кто мне помешает использовать другие *настоящие* монеты, которые у меня есть? Пошарив в карманах, я нашел то, что требовалось: прекрасный серебряный фертинг – этакий эталон. Поэтому первым взвешиванием я положил на левую чашку весов 1-ю и 2-ю монеты, а на правую – 3-ю и *эталонную*. И тем самым я распределил-таки все возможные 9 случаев по трем исходам. Обратите внимание: если перевесит левая чашка, значит, имеет место какой-то из трех случаев: 1Т, 2Т или 3Л. Если же перевесит правая, то опять же один из трех: 1Л, 2Л или 3Т. А при равновесии будет 4Л, 4Т или Н. Все! Дальнейшее – проще пареной репы. Как вторым взвешиванием выявить один случай из трех – Вы и сами сообразите.

– Ну-ка попробую! – загорелся Скрягинс. – Так... если надо выявить один случай из первых трех (1Т, 2Т, 3Л), то, наверное, лучше всего сравнить 1-ю и 2-ю монеты. Какая перевесит – та и фальшивая. Если же будет равенство – то фальшивая – 3-я. Из вторых трех (1Л, 2Л, 3Т) – тоже понятно как, даже и говорить не будем. Последние же три (4Л, 4Т, Н) – вполне очевидно: сравниваем 4-ю монету и эталон. Если равновесие – то фальшивых монет нет, если же нет – то 4-я монета фальшивая (будь она легче или тяжелей – все равно).

– Хвалю! – великодушно произнес Скуперфильд. – Именно так я и делал. И монета, кстати, оказалась настоящей! Вот Вам и прибыль от математики!

– Какая же прибыль? Монету Вы нашли без всякой математики, разве что один сантик на взвешиваниях сэкономили...

– А это разве мало? Если каждый день по сантику – сколько это за год получается? А за десять лет? То-то же! И вообще, как говорит очень мудрая пословица, сантик фертинг бережет⁴. Я ее никогда не забываю!

⁴ У нас на Земле тоже есть такая пословица, но она в разных странах звучит по-разному.

Примечание напоследок. Описанную здесь задачу в более общем виде поставил и решил хорватский математик В. Давиде в середине прошлого века. Она формулируется так. Дано $\frac{3^n - 1}{2}$ монет (n – натуральное). Среди них имеется не более одной фальшивой монеты, которая отличается от настоящих по весу (но неизвестно, в какую сторону). Кроме того, есть еще одна настоящая монета – «эталонная». Тогда за n взвешиваний на чашечных весах без гирь всегда можно выделить фальшивую монету и узнать, легче или тяжелее она, чем настоящая (либо же убедиться, что фальшивой монеты нет вообще). При отсутствии же эталонной монеты n взвешиваниями обойтись не удастся – именно потому, что не удастся распределить все возможные случаи (а их всего 3^n) поровну между тремя исходами первого же взвешивания.

ЛАВИНА ДЛЯ ПОЛКОВОДЦА

Лавиной в математике принято называть геометрическую прогрессию, знаменатель которой больше 1 (лучше, если он не меньше 2, хотя и не обязательно). Почему прижилось такое специфическое «высокогорное» название? Вместо ответа давайте представим себе скалу, с которой покатился одинокий камешек. Пусть за минуту он зацепил и столкнул вниз, скажем, 3 других камешка, а еще за минуту каждый из них также столкнул по 3 камешка и так далее. Вроде бы немного, но ответьте-ка с ходу, навскидку: сколько камней будет катиться с горы через полчаса? Ответ: более 100 000 000 000 000 (*ста триллионов*) камней! Не верите – пересчитайте. Теперь, видимо, ясно, откуда появился упомянутый термин. А знаменатель прогрессии (в рассмотренном примере равный 3) часто называют *коэффициентом размножения*.

Наверное, самая известная из древнейших лавин связана с легендой о создателе шахмат – индийском мудреце по имени Сета. Местный правитель предложил ему самому выбрать награду, и тот, не мудрствуя лукаво¹, заявил: «Дайте мне за первую клетку доски одно пшеничное зерно, за вторую – 2 зерна, за третью – 4 зерна и т.д., каждый раз увеличивая вдвое». Вот это называется – губа не дура, потому что если даже принять вес пшеничного зерна около 0,1 грамма (на самом деле – больше!),

¹ хотя в данном случае как раз наоборот: именно *мудрствуя лукаво!* Мудрец все-таки...

то суммарное количество зерен составляет почти 2 триллиона тонн (при том, что нынешний годовой урожай пшеницы по всему миру едва достигает миллиарда тонн).

Но не только в быстром росте особая прелесть лавины. Она также и в том, что возникающие в ней значения с огромным трудом воспринимаются обычным, «типовым» человеческим разумом. В самом деле, на практике мы с такими числами не встречаемся, и потому осмыслить их весьма затруднительно – просто не с чем сравнивать! Поэтому расскажите любому своему несведущему знакомому историю о шахматной доске и спросите: сколько всего зерен получится? Почти гарантированно вам ответят: полмешка, не больше! И вы никак не сумеете убедить собеседника, что он ошибается.

Надо сказать, что порой такая «недальновидность» может, наоборот, быть глубже и точнее любой теории (загляните, скажем, в рассказ о Санкт-Петербургском парадоксе – п. **Еще парадоксальней!**). Но чаще всего «проникновение в сущность» лавин, осознание грандиозности и стремительности их роста дает любителю математики приятное ощущение некоторого превосходства над остальными: вы, дескать, не понимаете сути вещей, а вот я ...

Есть и другие сюжеты, так или иначе связанные с лавинами. Например, следующая история стала широко известной благодаря выпущенной много лет назад книге «Живая математика», принадлежащей перу замечательного популяризатора естественных наук Я.И.Перельмана (сам он утверждал, что это пересказ легенды из древней рукописи).

Дело было так. Полководец Теренций, собираясь на заслуженный отдых, попросил императора выплатить ему пенсионное пособие в размере 5 миллионов брассов (брасс – медная монета массой 5 г). Император, однако, был скуп и решил обмануть полководца. Он сказал:

– Не хочу, чтобы ты получил за свои подвиги столь жалкую награду. Поэтому сделаем так. Ты войдешь в казначейство, возьмешь там в руки монету достоинством в 1 брасс, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый – стоящую 8 брассов, в пятый – 16 и так далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно изготавливать для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помо-

гать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами. И когда заметишь, что не можешь уже больше поднять монету – остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удалось тебе вынести, останутся твоими и послужат тебе наградой.

Жадно впивал Теренций каждое слово императора. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые вынесет он из государственного казначейства...

Начались ежедневные посещения Теренцием казначейства. В первый день он вынес всего один брасс. Легки были также второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, 4-кратного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

Седьмая монета весила 320 граммов, восьмая – 640 граммов, девятая – более килограмма.

На двенадцатый день монета весила уже свыше 10 кг. Император не скрывал своего торжества. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2 тысячи с небольшим брассов.

Тринадцатый день доставил храброму Теренцию монету, равную 4096 брассам, а вес ее равнялся 20 с лишком килограммов.

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в 41 кг весом, а на пятнадцатый день брел к императору, неся огромную монету, составленную из 16384 единичных монет. Она весила более 80 кг.

На шестнадцатый день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине, ибо вес ее составлял 164 кг. Следующую монету весом 328 кг Теренцию пришлось катить, а восемнадцатый день стал последним днем обогащения Теренция. На этот раз монета весила 655 кг. Пользуясь копьем, как рычагом, полководец с величайшим напряжением сил вкатил ее в залу.

Теренций был совершенно измучен.

– Не могу больше... Довольно... – прошептал он.

Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Общая сумма, заработанная Теренцием, составила всего 262143 брасса, т.е. оказалась почти в 20 раз меньше желаемой.

Ловко сработано, верно? Попался Теренций, как рыбка на крючок!

«Живую математику» за десятки лет прочли миллионы людей, и ни у кого не возникло ни малейшего сомнения в

хитроумности коварного императора, а к полководцу многие испытывали искреннюю жалость. И вряд ли кто заметил, что императорская хитрость – на самом деле *фикция*, а император и полководец в этой истории вели себя, мягко говоря, *странно*, а точнее говоря – совершенно *нелогично*!

Прежде, чем разобраться, в чем же состоит эта странность и нелогичность, оценим некоторые значения, которые нам вкратце понадобятся. Из рассказа видно, что монета весом 655 кг была почти пределом физических возможностей Теренция: еще чуть-чуть – и он не смог бы ее даже сдвинуть. Для удобства округлим это значение сверху до сотен, т.е. будем считать, что самая большая монета, поддающаяся усилиям Теренция, весит как раз 700 кг (что соответствует 140000 брассов). Кроме того, будем считать, что Теренций по состоянию здоровья, несмотря на пенсионный возраст, достаточно крепок (еще бы – вынес на плечах 164-килограммовую монету!), и потому способен в течение, скажем, 10000 дней (это около 25 лет) ежедневно являться в казначейство за наградой.

Итак, по сути дела, император решил «обрушить» на своего боевого полководца лавину с коэффициентом размножения $k = 2$. Так вот, выбор императором именно такого коэффициента размножения дает нам достаточные основания считать его *странным* человеком, потому что из всех возможных k он выбрал как раз то, которое приносит Теренцию *наибольшую* прибыль!

Рассмотрим, например, случай, когда каждая монета тяжелей предыдущей не в 2, а в $k = 3$ раза. Сколько всего монет поднял бы Теренций? Рассмотрев образующую последовательность 1, 3, 9, 27, ..., мы весьма быстро выясним, что Теренций поднимет лишь 11 монет, ибо 12-я превзойдет своим достоинством определенную нами выше границу, равную 140000. Поэтому награда составит $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} = 88573$ брасса. А ведь при $k = 2$ Теренций получил, как мы помним, 262143 брасса – почти втрое больше!

Величину 262143 брасса нельзя превзойти ни при каких $k > 2$. Убедимся в этом. Очевидно, при заданном k общая полученная Теренцием сумма равна:

$$S = 1 + k + k^2 + \dots + k^n,$$

где n – такое натуральное число, что $k^n \leq 140000$, а $k^{n+1} > 140000$.

Используя сумму членов геометрической прогрессии, нахо-

дим:

$$S = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Подставив в выражение для S оценку сверху для k^n , получим

$$S \leq \frac{140000k - 1}{k - 1}, \text{ или } S \leq 140000 + \frac{139999}{k - 1}.$$

При $k \geq 3$ дробь в правой части последнего неравенства меньше 70000, поэтому и подавно $S < 210000 < 262143$.

А если взять $k = 1$? Может быть, хотя бы здесь значение S окажется большим, чем при $k = 2$? Увы, нет. В данном случае вступит в действие другой неотвратимый фактор: брэнность земного бытия. Мы уже оценили предельную продолжительность хождения Теренция за деньгами в 10000 дней. Следовательно, при $k = 1$ ему достанется как раз 10000 брассов.

Разумеется, если принять другие ограничения (вместо 700 кг и 10000 дней), то выводы могут оказаться несколько иными (например, при предельной массе в 1000 кг будет $S(2) < S(3)$), но сути дела это не меняет.

Итак, хитрый (якобы) император, решивший обмануть полководца, подставив его под лавину, выбрал *наихудший* (или, во всяком случае, один из *наихудших*) коэффициентов ее размножения. Это и дает нам все основания считать его *странным* человеком.

Можно также было бы попенять императору и за требование, чтобы Теренций непременно приходил за очередной монетой на следующий день. Такое условие просто бессмысленно, ибо какая, в принципе, разница – надорвется полководец на восемнадцатый день или в течение первых же суток? Хотя этот упрек, видимо, надо снять: допустим, император хотел растянуть удовольствие, наблюдая за несчастным Теренцием.

Итак, с императором мы разобрались и пригвоздили его к соответствующему столбу. А Теренций? С ним дело обстоит несколько сложнее. Попробуем *промоделировать* поведение Теренция.

Итак, Теренция охватила огромная радость, когда он услышал императорские условия: «...представил себе огромное множество монет, одна больше другой...» и т.д. Короче – Теренций прекрасно понял, что достоинства монет образуют *лавину*, и обогащение пойдет весьма быстрыми темпами. Не такой он, выходит, простак! Действительно, рассуждай Теренций «по-

бытовому», он имел бы основания возмутиться императорским предложением: ходи, дескать, каждый день за какими-то грошами (вспомните вышеупомянутые «полмешка»!).

Но ведь вес монет пропорционален их стоимости – полководец не мог этого не знать! Поэтому массы тоже образуют лавину, которая его и засыплет! Теренций *обязан* был это понять! А может, он просто упустил данное обстоятельство из виду? Нет, и это невозможно – император *специально* обратил внимание Теренция на данный факт: «... И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помогать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами...» В результате Теренций с непонятной радостью соглашается на коварное предложение, которое, по идее, должен был бы моментально раскусить. Получается, что он одновременно *и понял, и не понял*, что имеет дело с лавиной. Парадокс! Иначе как *странным* такое поведение не назовешь.

Резюме: *невозможно объяснить*, каким образом императору удалось привести в исполнение свой на первый взгляд изощренный и коварный, а на самом деле – весьма недалекий план. Похоже, Теренций *сам хотел*, чтобы его обманули. Не странно ли это, а?

Читатель, видимо, убедился, что эта история как бы имеет двойное дно. Но и его можно еще углубить. Допустим, возможны и нецелые значения k . При каком k Теренций получит наибольшую награду? (Насчет наименьшей – все понятно: достаточно взять любое $k > 140000$, и доход полководца составит единственный брасс!) Нетрудно понять (хотя, надо признать, совсем не легко строго доказать), что это произойдет при таком k , когда в последний, 10000-й день монета будет весить ровно 700 кг, т.е. составлять 140000 брассов, что произойдет при

$k = \sqrt[9999]{140000} \approx 1,0012$. Тогда общий доход Теренция более, чем за 25 лет хождения в казначейство составит

$$S = \frac{k^{10000} - 1}{k - 1} \approx 120 \text{ миллионов брассов!}$$
 Это во много раз больше, чем он просил у императора. Как видим, не та лавина, что гремит, а та, что ползет. В связи с этим можно было бы посоветовать Теренцию так ответить на заманчивое с виду предложение императора:

«Государь! Такая награда слишком щедра для меня! Более того, столь быстрое уменьшение казны может нанести большой

ущерб тебе и всему государству. Поэтому я не могу согласиться на такое стремительное нарастание стоимости монет. Но совсем отвергать твоё великодушное предложение было бы дерзостью с моей стороны. Прошу об одном: пусть стоимость монет нарастает, но не так быстро. Меня вполне удовлетворит, если каждая монета будет тяжелее предыдущей лишь на 12 сотых процента». (Замечание: скорее всего, процентов тогда не знали, но, думается, Теренций смог бы объяснить своё пожелание и без них).

Попытка – не пытка. Глядишь, император и сам проглотил бы наживку, не заметив крючка, что обернулось бы в конечном счёте разорением для империи.

Здесь, правда, всплывает другое затруднение: достоинства монет не будут выражаться целыми числами, что, возможно, в те времена не допускалось. Ничего, Теренций и здесь мог ввести великодушную поправку: пусть, мол, при изготовлении монет вычисленный вес очередной монеты округляется в *меньшую* сторону! Такая жертва не слишком ударит по карману Теренция: ущерб, заведомо меньший 10000 брассов², просто мизерен по сравнению с доходом.

Конечно, нам с вами легко решать финансовые проблемы отважного полководца. А вот что ответил бы сам Теренций, обдумав последний вариант? Не исключено, что он, в свою очередь, признал бы его по меньшей мере *странным*. Ведь при этом за первые пять лет ему досталось бы менее 7000 брассов, а первые года полтора пришлось бы каждый день приходить за монеткой в 1 брасс! А основную часть награды он получил бы лишь в самые последние годы, до которых ещё надо дожить (что весьма проблематично, если император спохватится и решит поставить точку на растаскивании государственной казны, – яды умели приготавливать во все времена!).

ПОТОМКИ ЯНЫЧАРА

Кто смотрел замечательную экранизацию романа М.Булгакова «Бег», наверняка не забудет яркие эпизоды *тараканьих бегов*, организованных российским эмигрантом по имени Артур Артурович (с гордым прозвищем Тараканий Царь). В бегах, проводившихся по всем правилам – с тотализатором! – бесспорным лидером был *серый в яблоках* таракан по кличке Янычар. Любого соперника обходил, пока не раздавили.

² а точнее – равный 4914 брассам, как показывает компьютерный расчёт

Возможно, именно это событие (или же личная бытовая неустроенность) подвигло неизвестного автора придумать и предложить в 2005 г. на XI Турнире математических боев имени А.П.Савина следующую задачу:

В очередном забеге по коридору общежития участвуют 44 веселых таракана. Тараканы стартовали одновременно от одной стены. Добежав до противоположной стены, таракан сразу поворачивает обратно. Первый таракан бежит не очень быстро, второй – вдвое быстрее, третий – вдвое быстрее второго, и так далее. Могут ли тараканы встретиться все вместе в точке, отличной от точки старта?

Авторский ответ таков: *могут*. А именно, если ширина коридора равна S , а скорость первого таракана равна v , то ровно через промежуток времени после старта, равный $2S/(3v)$, все тараканы окажутся на расстоянии $2S/3$ от точки старта.

Доказать это проще всего по индукции. Правда, придется отдельно рассмотреть тараканов с нечетными и четными номерами, потому что они, оказывается, в момент встречи будут бежать в противоположные стороны. Итак:

Теорема 1. Путь L , который пробежит любой таракан с нечетным номером (т.е. 1-й, 3-й, 5-й и т.д.) за промежуток времени после старта, равный $2S/(3v)$, можно записать в виде:

$$L = 2SK + 2S/3,$$

где K – некоторое целое неотрицательное число.

Обратим внимание, что это как раз и означает, что таракан на тот момент окажется на расстоянии $2S/3$ от точки старта, ибо первое слагаемое $2SK$ есть не что иное, как K -кратный пробег таракана от одной стены до другой и обратно – на исходную позицию.

Итак, база индукции. Для таракана номер 1 все очевидно: для него $K = 0$, и он даже до противоположной стены добраться не успеет.

Шаг индукции: пусть некоторый таракан с нечетным номером за указанный промежуток времени пробежит путь $l = 2Sk + 2S/3$ (k – целое неотрицательное). Скорость таракана со следующим *нечетным* номером, очевидно, в 4 раза больше, поэтому и путь его будет в 4 раза больше, т.е.

$$\begin{aligned} L &= 4l = 4(2Sk + 2S/3) = 8Sk + 8S/3 = \\ &= 2S(4k + 1) + 2S/3 = 2SK + 2S/3, \end{aligned}$$

где $K = 4k + 1$ – тоже целое неотрицательное число.

Теорема 2. Путь L , который пробежит любой таракан с четным номером за промежуток времени после старта, равный $2S/(3v)$, можно записать в виде:

$$L = 2SK + S + S/3,$$

где K – некоторое целое неотрицательное число.

Это также означает, что таракан на тот момент окажется на расстоянии $2S/3$ от точки старта. Действительно, первое слагаемое $2SK$, как и прежде, есть K -кратный пробег таракана от одной стены до другой и обратно, второе слагаемое S – дополнительный пробег таракана от «стартовой» стены до противоположной, и третье слагаемое $S/3$ – возврат таракана от противоположной стены на величину, как раз соответствующую той же самой точке встречи.

Дальнейшее ясно. Сначала база индукции. Скорость таракана номер 2 равна $2v$, и за время $2S/(3v)$ он пробежит путь $2v \cdot 2S/(3v) = 4S/3 = S + S/3$, что соответствует $K = 0$.

Шаг индукции: пусть некоторый таракан с четным номером за указанный промежуток времени пробежит путь $l = 2Sk + S + S/3$ (k – целое неотрицательное). Путь таракана со следующим четным номером в 4 раза больше, т.е.

$$\begin{aligned} L = 4l &= 4(2Sk + S + S/3) = 8Sk + 4S + 4S/3 = \\ &= 2S(4k + 2) + S + S/3 = 2SK + S + S/3, \end{aligned}$$

где $K = 4k + 2$ – тоже целое неотрицательное число.

Итак, место встречи изменить нельзя – все тараканы сойдутся в точке, отличной от стартовой.

Убедились? Все согласны? Хорошо.

А теперь проследим, как грубая реальность нахально врывается в изящные теоретические рассуждения и с треском обрушивает ажурные умозрительные конструкции. Другими словами, докажем, что на самом деле тараканы не встретятся никогда.

Из условия следует, что последний таракан бежит быстрее первого в $2^{43} = 8\,796\,093\,022\,208$ раз. Это больше, чем $8 \cdot 10^{12}$. Скорость любого «бытового» таракана заведомо не превосходит 1 м/с (тоже сильно завышенное значение). Значит, и скорость последнего – самого быстрого – таракана не больше 1 м/с. Посему скорость первого таракана никак не больше $1 : (8 \cdot 10^{12}) = 1,25 \cdot 10^{-13}$ м/с. Ширина коридора общежития – безусловно, не меньше метра (дабы жильцы могли в нем хоть как-то разминуться), и тогда предполагаемая точка встречи всех тараканов находится на расстоянии не менее

$2 \times 1/3 = 0,67$ метра от точки старта. И, стало быть, первый (не слишком быстрый, как сказано в условии) таракан доберется до нее не раньше, чем через $0,67 : (1,125 \cdot 10^{-13}) = 6 \cdot 10^{12}$ с, что составляет больше 180 тысяч лет! Увы (или, может быть, к счастью), *тараканы столько не живут*. А значит, и встретиться им не суждено. Вот если бы тараканов было поменьше – где-нибудь с десятков – тогда другое дело. Да, автор задачи явно перестарался. И вообще, в каком это общежитии он видел столько тараканов?

РЕШЕНИЕ РЕБУСОВ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Числовые ребусы – любимый вид задач многих научно-популярных журналов. Как редкая птица долетит до середины Днепра, так и редкий номер такого научно-популярного журнала, как, скажем, «Квант», обходится без ребусов. По каким-то причинам (этот вопрос еще никем не исследован) предпочтение в нем отдается задачам на сложение. Например:

$$\text{EINS} + \text{EINS} + \text{EINS} + \text{EINS} + \text{EINS} = \text{FUNF}$$

(«Квант» №5, 1990 г.).

Как всякий уважающий себя журнал, «Квант» публикует, в основном, только такие ребусы, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам – разные цифры, ни одно число не начинается нулем, и ребус можно расшифровать единственным образом.

Многие из вас неоднократно решали такие ребусы; какие-то из них даются легче, какие-то – труднее, и нередко приходится хорошенько поломать голову, чтобы, используя какое-то малоприметное свойство, суметь распутать задачу и получить искомый ответ. Без перебора, как правило, тоже не обходится, и количество рассматриваемых вариантов часто зависит от изобретательности и сообразительности решающего. Короче говоря – ребус ребусу рознь, и каждый требует индивидуального подхода.

После такого аргументированного и вроде бы неоспоримого вступления позвольте заметить следующее. Оказывается, имея обыкновенный микрокалькулятор, можно большинство этих ребусов решить за несколько минут одним и тем же почти механическим способом, не требующим ни особой изобретательности, ни, тем более, сообразительности. Не верите? Сейчас убедитесь.

1. Взвешивание

Суть метода покажем на примерах, взятых из различных номеров «Кванта» (дабы избежать упрека в специальном придумывании ребусов для подтверждения своих идей).

Пример 1 («Квант» №4, 1989 г.):

$$\text{АИСТ} + \text{АИСТ} + \text{АИСТ} + \text{АИСТ} = \text{СТАЯ}.$$

Очевидно, $\text{АИСТ} = 1000A + 100И + 10С + T$, а $\text{СТАЯ} = 1000С + 100T + 10A + Я$. Тогда ребус можно записать в виде: $4(1000A + 100И + 10С + T) = 1000С + 100T + 10A + Я$.

Осталось решить это уравнение в неотрицательных целых и (самое главное!) различных однозначных числах, причем A и C не равны 0.

Перенесем все неизвестные в левую часть и запишем их в порядке убывания абсолютных величин коэффициентов:

$$3990A - 960C + 400И - 96T - Я = 0.$$

Первое слагаемое равно $3990A$. Подберем такое A , чтобы оно как можно меньше отличалось от нуля. Так как $A \neq 0$, то приходится брать $A = 1$, и $3990A = 3990$.

Тогда сумма первых двух слагаемых равна $3990 - 960C$. Так как следующее – третье – слагаемое ($400И$) имеет знак «плюс», то подберем такое C , чтобы сумма двух первых слагаемых была как можно ближе к нулю, но оставалась *не больше* нуля. Это будет при $C = 5$ тогда

$$3990 - 960C = -810.$$

Рассмотрим сумму первых трех слагаемых, равную $-810 + 400И$. Так как четвертое слагаемое имеет знак «минус», то подберем такое $И$, чтобы сумма была возможно ближе к нулю, но *не меньше* нуля. Получаем $И = 3$, и сумма первых трех слагаемых равна $+390$.

Перейдем к сумме первых четырех слагаемых, равной $390 - 96T$. Так как пятое слагаемое имеет знак «минус», то надо подобрать такое T , чтобы сумма оставалась *не меньше* нуля, находясь возможно ближе к нулю. Это будет при $T = 4$, и сумма равна $+6$. Дальнейшее ясно: последняя сумма равна $6 - Я$ и должна равняться нулю, т.е. $Я = 6$.

Ответ готов: $\text{АИСТ} = 1354$, $\text{СТАЯ} = 5416$.

Разумеется, на каждом шагу следует выбирать значение очередной буквы из ранее не использованных цифр. А вообще-то рассмотренный метод напоминает такую практическую задачу. Имеются чашечные весы и набор разнокалиберных гирь,

которые надо побыстрее уравновесить. Наиболее естественный способ таков: самую тяжелую гирю ставим на одну чашку, пару штук полегче – на другую и так далее, т.е. загрузку весов начинаем с самых больших гирь. Фактически то же самое мы сделали, решая данный ребус, поэтому можем смело утверждать, что решили его *на чашечных весах*. При этом приведенные рассуждения удобно оформить в виде таблицы:

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	3990A	не использ.	$A = 1$	+3990
2	3990 – 960C	+	$C = 5$	–810
3	–810 + 400И	–	$И = 3$	+390
4	390 – 96T	–	$T = 4$	+6
5	6 – Я	нет	$Я = 6$	0

2. Шевеление

К сожалению, описанным способом не всегда удастся вот так, «с ходу», получить ответ. Поэтому сейчас мы ознакомимся со второй частью метода, самое подходящее название для которой – *шевеление*.

Пример 2 («Квант» №9, 1990 г.):

$$ЗАЗОР + АЗОР + ЗОР + ОР + Р = 55550.$$

Не надо пугаться того, что кроме букв в ребусе присутствует и конкретное число. Требуется лишь, преобразовывая уравнение к эквивалентному виду, записать это число в самом начале (считая его, так сказать, самой увесистой гирей):

$$55550 - 10300 \cdot З - 2000 \cdot А - 40 \cdot О - 5 \cdot Р = 0$$

(здесь действие умножения всюду указано явно, чтобы не спутать с цифрами похожие на них буквы З и О). Поделим предварительно это уравнение на 5:

$$11110 - 2060 \cdot З - 400 \cdot А - 8 \cdot О - Р = 0.$$

А теперь составим для него такую же таблицу, причем постоянному члену не присваиваем отдельного номера слагаемого:

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	$11110 - 2060 \cdot Z$	–	$Z = 5$	+810
2	$810 - 400 \cdot A$	–	$A = 2$	+10
3	$10 - 8 \cdot O$	–	$O = 1$	+2
4	$2 - P$	нет	$P = 3$	–1

Как видно, не удалось добиться ненулевой суммы. Вот если бы взять $P = 2$, но это значение уже занято буквой A ! Что же делать?

Применим *шевеление*, т.е. будем понемногу менять значения букв, стоящих перед P , в порядке возрастания коэффициентов. Если, не меняя Z и A , пошевелить O , то, как видно, итоговая сумма станет либо отрицательной, либо двузначной, и никакое допустимое значение P ее не скомпенсирует. Если пошевелить A , не меняя Z , то при изменении A на 1 сумма изменяется аж на 400, и никакие значения O и P с их жалкими коэффициентами не смогут ее занулить. Выход один: надо шевелить Z . Очевидно, брать $Z > 5$ нельзя: сумма станет отрицательной без дальнейшей компенсации. Возьмем ближайшее к 5 меньшее число, т.е. $Z = 4$, и снова составим таблицу по тем же правилам:

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	$11110 - 2060 \cdot Z$	–	$Z = 4$	+2870
2	$2870 - 400 \cdot A$	–	$A = 7$	+70
3	$70 - 8 \cdot O$	–	$O = 8$	+6
4	$6 - P$	нет	$P = 6$	0

Порядок! Задача решена: $ЗАЗОР = 47486$.

Между прочим, и эти наши действия можно интерпретировать применительно к чашечным весам. В самом деле, если мы, уравнивая разнокалиберные гири, не добились идеального равновесия, то для точной подгонки будем прежде всего переключать туда-сюда самые легкие гири, а если это не поможет, задействовать те, что потяжелее.

3. Наибольший общий делитель

Назовем еще одну уловку, позволяющую заранее отсечь при шевелении некоторые заведомо бесперспективные

значения букв. Назовем ее так: «уловка НОД» (что, понятное дело, означает Наибольший Общий Делитель). В качестве примера решим ребус, приведенный в начале статьи.

Пример 3: $EINS + EINS + EINS + EINS + EINS = FUNF$.

Его эквивалентный вид:

$$5000E - 1001F + 500I - 100U + 40N + 5S = 0.$$

Уловка НОД применяется, если наименьший из коэффициентов (в данном случае при S) не равен 1. Тогда, очевидно, сумма, получаемая при «подходе» к последнему слагаемому, должна делиться на этот коэффициент. Кроме того, сумма, получившаяся при «подходе» к предпоследнему слагаемому, должна делиться на НОД коэффициентов при двух последних слагаемых и так далее. Иначе говоря, при подборе значений букв надо следить, чтобы получаемая сумма делилась на НОД коэффициентов при последующих слагаемых. Это позволяет отбросить заведомо бесперспективные значения, но приводит к необходимости ввести дополнительную графу в нашу таблицу:

Слагаем. в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаем.	НОД последующ. коэффиц.	Значение буквы	Значение суммы
1	$5000E$	-	1	$E = 1$	+5000
2	$5000 - 1001F$	+	5	$F = 5$	-5
3	$-5 + 500I$	-	5	$I = 2$	+995
4	$995 - 100U$	+	5	$U = 9$	+95
5	$95 + 40N$	+	5	$N = 0$	+95
6	$95 + 5S$	нет	нет	$S = 3$	+110

Краткие пояснения: здесь, как видно, лишь при двух значениях F сумма делится на 5: это $F = 0$ и $F = 5$. Но F стоит на первом месте в числе $FUNF$ и, следовательно, не может быть равным нулю. После слагаемого ($-100U$) все члены положительны, поэтому сумму надо было непременно сделать отрицательной, но даже наибольшее возможное значение $U = 9$ не позволило ее скомпенсировать. Результат налицо: решение не найдено.

Приступим к шевелению. Очевидно, шевелить надо переменные, стоящие перед U , т.е. начинать надо с I . Если взять $I > 2$, то неувязка еще больше усугубится. Значение 1 занято. Попробуем $I = 0$. Переделаем таблицу, причем даже не всю, а лишь строки, начиная с третьей:

Слагаем. в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаем.	НОД последующ. коэффиц.	Значение буквы	Значение суммы
1	$5000E$	-	1	$E = 1$	+5000
2	$5000 - 1001F$	+	5	$F = 5$	-5
3	$-5 + 500I$	-	5	$I = 0$	-5
4	$-5 - 100U$	+	5	$U = 2$	-205
5	$-205 + 40N$	+	5	$N = 4$	-45
6	$-45 + 5S$	нет	нет	$S = 9$	0

Готово: $EINS = 1049$, $FUNF = 5245$.

Что ж, после такой радужной картины самое время, видимо, добавить ложку дегтя. Не всегда (и, пожалуй, далеко не всегда) после первого же шевеления мы придем к ответу. Иной раз приходится изрядно повозиться. И вот тому подтверждение.

Пример 4 («Квант» №12, 1989 г.):

$$\text{КНИГА} + \text{КНИГА} + \text{КНИГА} = \text{НАУКА}.$$

Эквивалентный вид:

$$29990K - 7000H - 998A + 300I - 100U + 30G = 0.$$

Последний коэффициент не равен 1, и здесь тоже придется использовать столбец с НОД:

Слагаем. в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаем.	НОД последующ. коэффиц.	Значение буквы	Значение суммы
1	$29990K$	-	2	$K = 1$	+29990
2	$29990 - 7000H$	-	2	$H = 4$	+1990
3	$1990 - 998A$	+	10	$A = 5$	-3000
4	$-3000 + 300I$	-	10	$I = 9$	-300
5	$-300 - 100U$	+	30	$U = 0$	-300
6	$-300 + 30G$	нет	нет	$G = 8$	-60

Ответ не получен, причем, как видно, основной «сбой» произошел после того, как было выбрано $A = 5$ (получившаяся в результате сумма оказалась некомпенсируемой). Надо бы попробовать другое A , которое с учетом НОД должно быть кратно 5. Однако здесь мы угодим в другую крайность: получится некомпенсируемая положительная сумма. Значит, надо шевелить что-то «повыше», например H , и начинать со значений 3 и

5, соседних с $H = 4$. Но тут же выяснится, что опять возникает некомпенсируемая сумма, причем гораздо большая, чем при $H = 4$ (убедитесь!). Ясно, что другие значения H нет смысла и пробовать. Придется шевелить самое начало – K . Сначала, разумеется, возьмем $K = 2$:

Слагаем. в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаем.	НОД последующ. коэффиц.	Значение буквы	Значение суммы
1	29990К	–	2	$K = 2$	+59980
2	59980 – 7000Н	–	2	$H = 8$	+3980
3	3980 – 998А	+	10	$A = 5$	–1010
4	–1010 + 300И	–	10	$I = 4$	+190
5	190 – 100У	+	30	$U = 7$	–510
6	–510 + 30Г	нет	нет	$\Gamma = 9$	–240

Здесь пришлось взять $U = 7$, чтобы сумма была отрицательна и притом делилась на 30. В итоге скомпенсировать ее не удалось, даже взяв наибольшее возможное значение $\Gamma = 9$. Пошевелим букву I , стоящую перед U . Сначала надо попробовать соседние значения, т.е. $I = 3$ и $I = 5$. Но 5 уже занято буквой A . Поэтому возьмем $I = 3$:

Слагаем. в сумме	Вид суммы	Знак последующ. слагаем.	НОД последующ. коэффиц.	Значение буквы	Значение суммы
1	29990К	–	2	$K = 2$	+59980
2	59980 – 7000Н	–	2	$H = 8$	+3980
3	3980 – 998А	+	10	$A = 5$	–1010
4	–1010 + 300И	–	10	$I = 3$	+110
5	–110 – 100У	+	30	$U = 1$	–210
6	–210 + 30Г	нет	нет	$\Gamma = 7$	0

Наконец-то получен результат: $КНИГА = 28375$, $НАУКА = 85125$. Действительно, пришлось повозиться. Хотя, честно говоря, не очень-то много вариантов пришлось перебрать: всего-навсего 6. Могло быть и хуже.

Итак, читатель получил достаточно наглядное представление о решении ребусов на чашечных весах. Плюсы его ясны: во-первых, этот метод позволяет наверняка найти решение (лишь бы оно было); во-вторых – независимость от конкретного ребуса

(универсальность); в-третьих – «думать не надо» (или, философски говоря, *принцип экономии мышления*). Ну, а минусы? Во-первых, неизвестно, сколько придется сделать шевелений, если сразу решение не получено (т.е. стоит ли овчинка выделки); во-вторых, будет найдено лишь одно решение, даже если их несколько; а в-третьих, если решения вовсе нет (например, когда неверно напечатано условие – а такое, чего греха таить, встречается!), то наше положение будет просто жутким, ибо решение превратится в почти полный перебор с нулевым результатом.

Часто в конце статьи даются задачи для самостоятельного решения. В данном случае это не имеет смысла: читатель может найти множество подходящих ребусов на страницах того же «Кванта».

И в заключение – предложение к читателям: попробуйте придумать какие-нибудь эффективные вариации и дополнения к рассмотренному методу, а также модернизировать его для решения других типов ребусов. Например, на умножение, наподобие ребуса *ДВА × ДВА = ЧЕТЫРЕ*, кстати, имеющего единственное решение. Успеха вам!

НИ ЛОЙД, НИ ДЬЮДЕНИ...

Есть такой анекдот. В редакции молодому поэту сказали:

– У Вас есть два стихотворения, которые не смогли бы написать ни Пушкин, ни Лермонтов.

– Правда? – обрадовался тот.

– Да, одно о радио, другое о телевидении.

Многим из нас знакомы прекрасные задачи известных сочинителей головоломок Сэма Лойда и Генри Дьюдени. Повозиться с ними одно удовольствие. Особый колорит этим задачам придает то, что авторы представили их в виде коротких историй, будто бы имевших место в действительности, притом для решения зачастую приходится привлекать сведения, явно не содержащиеся в условии. Вполне естественно, что сборники таких головоломок («Математическая мозаика» Лойда и «Кентерберийские головоломки» Дьюдени) исчезли с прилавков книжных магазинов практически мгновенно.

В этой статье читателю предлагается несколько задач, также изложенных в виде историй. Их не смогли бы составить ни Лойд, ни Дьюдени как раз в силу причин, указанных в анекдоте: того, о чем пойдет речь, в их времена просто не существовало. Итак:

Число на асфальте

Петя и Коля, встретившись на улице, увидели написанное мелом на асфальте двузначное число. Петя прибавил к нему 4 и затем поделил на 7, а Коля поделил его на 9 и затем отнял 1. Результаты совпали.

Какое число было написано?

«Что же здесь современного?» — спросит читатель. Ну, конечно, асфальт! В те времена дороги асфальтом не покрывали¹, а писать мелом на брусчатке крайне неудобно. Поэтому можно смело утверждать, что ни Лойд, ни Дьюдени составить такую задачу не смогли бы.

Шахматные часы

В печати промелькнуло сообщение об изобретении новых шахматных часов. Такие часы отводят каждому игроку первоначально 40 минут, а после каждого сделанного хода резерв времени увеличивается на 2 минуты². Таким образом, во-первых, сохраняется общепринятая норма времени (2 часа на 40 ходов)³, и, во-вторых, при обдумывании каждого хода игрок имеет запас времени не менее двух минут, что снижает вероятность грубых ошибок, вызываемых цейтнотом. После 40 ходов партия откладывается и затем доигрывается с новым контролем времени.

В шахматном турнире с использованием этих часов встретились шахматисты А и В, причем шахматист А тратил на обдумывание каждого хода одинаковое время. Сделав очередной ход, он заметил, что всего израсходовал столько же времени, сколько у него осталось в резерве. Еще через несколько ходов он обнаружил, что запас стал в два с половиной раза меньше затрачено времени. Известно также, что его противник 14-й ход сделал конем, и встреча закончилась без доигрывания победой одного из игроков.

А теперь попробуйте ответить на вопросы:

- 1) Кто играл белыми?
- 2) Кто выиграл?

¹ Вообще-то, уже после первой публикации статьи выяснилось, что все-таки покрывали! Но не выбрасывать же задачу из-за этого...

² Говорят, к их созданию приложил руку сам Роберт Фишер — чемпион мира по шахматам. Уж он-то хорошо знал, какие часы требуются игрокам!

³ Вьедливый читатель заметит, что не 2 часа, а 1 час 58 минут. (Прим. ред.)

А вот еще одна современная задача, но связанная не с достижениями науки и техники, а с новой модной теорией⁴.

Задача о биоритмах

Прошлым летом (как сейчас помню – второго числа) мы отмечали день рождения Сергея Сергеевича, а той же осенью (помнится, десятого числа) – день рождения его племянника.

– Мы с племянником – близкие натуры, – заявил тогда Сергей Сергеевич, – и не только по причине родства, но и потому, что наши биоритмы полностью совпадают.

– Это точно, – подтвердил племянник.

Вопросы:

1) *В каком месяце родился Сергей Сергеевич?*

2) *В каком веке родился Сергей Сергеевич?*

Примечание (для тех, кто не знает, что такое биоритмы): существует теория, согласно которой при рождении человека одновременно «включаются» три цикла: физический, эмоциональный и интеллектуальный продолжительностью соответственно 23, 28 и 33 суток; в первой половине каждого цикла соответствующие способности и склонности человека повышены, во второй – понижены.

В следующей задаче попробуйте определить не месяц и не век, а год.

Какой год?

Петр Петрович родился в день открытия Олимпийских игр. Как-то, отметив свой день рождения, он обнаружил, что его возраст стал равен сумме цифр текущего года. В каком году родился Петр Петрович?

Ну, и еще одна задачка, которая только потому не могла быть создана во времена Ллойда и Дьюдени, что они не знали советских монет образца 1961 года (медные монеты достоинством 1, 2, 3, 5 копеек весили соответственно 1, 2, 3, 5 граммов).

Задача о мармеладе

Один школьник описывал другому случай, происшедший с ним в школьном буфете:

– *Захотелось мне мармеладу, а денег мало. Я подсчитал*

⁴ Не очень, правда, модной – за 15–20 лет, прошедших со времени возникновения, ее успели подзабыть.

свои возможности и говорю: «Взвесьте мне, пожалуйста, 25 граммов», а буфетчица в ответ: «У меня гирьки такой нет, самая маленькая — 50 граммов». Так я и ушел несолоно хлебавши. (Весы в буфете рычажные, с двумя чашками и без стрелок.)

— Ну ты и профан! — воскликнул собеседник. — Ты бы сказал: «Вот Вам 5 медяков по 5 копейки, они весят как раз 25 граммов» — и все в порядке.

— Будь у меня такие деньги, я бы купил больше. Но у меня то было всего 4 копейки...

Поразмыслив, приятели нашли два способа взвесить 25 граммов мармелада в указанных условиях. А найдет ли читатель?

Надеюсь, предложенные задачи пришлись вам по вкусу. Надеюсь также, что прежде чем читать приведенные ниже решения, вы сами поломаете голову в поисках путей к ним

РЕШЕНИЯ

Число на асфальте

Задача кажется очень простой и разрешимой очевидным образом. Но не тут-то было!

Более сообразительные сразу поймут: что-то здесь не так. Действительно, Петя сначала *увеличил* число, а затем взял от него *седьмую* часть; Коля же взял лишь *девятую* часть, которую затем еще и *уменьшил*. Но ведь тогда у Пети наверняка должен получиться больший результат, чем у Коли! Менее сообразительные просто попробуют решить задачу «в лоб» и, обозначив искомое число через x , составят уравнение:

$$\frac{x + 4}{7} = \frac{x}{9} - 1$$

откуда $x = -49,5$, что вообще не лезет ни в какие ворота.

В чем же дело? Чтобы разобраться, еще раз осмыслим условие задачи. Итак, Петя и Коля встречаются (видимо, лицом к лицу), затем опускают глаза вниз и видят число... Скорее всего, так оно и было. Но тогда они увидят число с разных сторон! Теперь понятно, в чем причина: некоторые числа, будучи перевернутыми, имеют вполне корректный вид, но другие числовые значения. Однако это возможно, только если каждая цифра такого числа допускает переворачивание. Какие же это цифры? Конечно, 0 и 8, переходящие сами в себя; 6 и 9, переходящие друг в друга; а также с некоторой натяжкой цифра 1 (здесь можно спорить, но на всякий случай включим и ее). Какие-то из

них и составили записанное на асфальте двузначное число, которое Петя воспринял как некоторое число P , а Коля — как его «антипод» K . Тогда $\frac{P+4}{7} = \frac{K}{9} - 1$, откуда $7K = 9(P+11)$.

Во-первых, отсюда следует, что $K > P$ (что, впрочем, и без того очевидно), а во-вторых, становится ясно, что K делится на 9.

Из цифр 0, 1, 6, 8 и 9 можно составить всего 5 чисел K , делящихся на 9 (включая на всякий случай и начинающиеся цифрой 0). Это: 09, 18, 81, 90 и 99, которым соответствуют P , равные 60, 81, 18, 06 и 66. Значения K , равные 09 и 18, придется отбросить, так как для них $K < P$. Для остальных трех значений сделаем прямую проверку:

1) $K = 81$, $P = 18$. Тогда $7K = 567$ и $9(P+11) = 261$. Не подходит.

2) $K = 90$, $P = 06$. Тогда $7K = 630$ и $9(P+11) = 153$. Тоже не подходит.

3) $K = 99$, $P = 66$. Тогда $7K = 9(P+11) = 693$. Это подходит.

Итак, Петя и Коля видели одно и то же число, но Петя воспринял его как 66, а Коля — как 99.

Шахматные часы

Пусть игрок А сделал n ходов и на обдумывание каждого хода тратил t минут. Тогда всего он потратил tn минут.

Шахматные часы отвели ему 40 минут первоначально и по 2 минуты за каждый сделанный ход, т.е. $(40 + 2n)$ минут. Из них tn минут он израсходовал, поэтому после n -го хода его запас составляет $(40 + 2n - tn)$ минут.

Если после n -го хода израсходованное время равно запасу, то $tn = 40 + 2n - tn$, откуда $t = \frac{20+n}{n}$.

Если после другого, m -го хода израсходованное время оказалось в 2,5 раза больше резерва, то, рассуждая аналогично, получим $tm = 2,5(40 + 2m - tm)$, откуда $t = \frac{200+10m}{7m}$.

Приравняв полученные значения t , имеем $\frac{20+n}{n} = \frac{200+10m}{7m}$, откуда $m = \frac{200n}{140-3n}$.

Видно, что с ростом n растет и m (так как числитель возрастает, а знаменатель уменьшается). При этом наименьшее n , при котором m будет целым — это $n = 5$ (тогда $m = 8$). Следующее по величине значение n , при котором m будет также целым — это $n = 20$ (тогда $m = 50$). Но в последнем случае партия

продолжалась бы не менее 50 ходов, и она по этой причине должна быть отложена, а затем доиграна, что противоречит условию. Еще большие значения n влекут за собой еще большие значения m . Поэтому возможен лишь один вариант: $n = 5$, $m = 8$. Тогда

$$t = \frac{20 + n}{n} = 5 \text{ минут.}$$

А теперь подсчитаем, на сколько ходов хватило бы времени шахматисту А, если бы он тратил 5 минут на ход. Видно, что после каждого хода его запас времени уменьшается на 3 минуты, поэтому он может сделать максимум 13 ходов, после чего останется лишь минута, т. е. 14-й ход он сделать не успеет.

По условию, игрок В сделал 14-й ход конем. Конь здесь, конечно, ни при чем⁵, а главное – что он сумел сделать *не менее* 14 ходов. Если бы В играл черными, то тогда А, играя белыми, тоже сделал бы не менее 14 ходов, но это, как мы только что выяснили, невозможно. Поэтому А играл черными.

После того как В, играя белыми, сделал 14 ходов, наступила очередь А делать 14-й ход. Но у него не хватит на это времени! И поэтому он наверняка проиграл, просрочив время (или сдался после 14-го хода противника, либо же получил мат на 14-м ходу). Во всяком случае, А *проиграл*.

Задача о биоритмах

Так как НОК (23, 28, 33) = 21252, то, чтобы биоритмы Сергея Сергеевича и его племянника совпали, разность их возрастов должна быть кратна 21252 дням. Так как это более 58 лет, то ясно, что либо дядя и племянник ровесники, либо один из них старше на 21252 дня (поскольку оба они одновременно живы, то большие разности нереальны).

Но ровесниками они быть не могут, т. к. день рождения дяди летом, а племянника – осенью. Кроме того, так как $21252 = 365 \times 58 + 82$, то разность их возрастов составляет 58 лет плюс какой-то срок, заведомо меньший трех месяцев. Поэтому если бы племянник был старше, то день рождения дяди наступил бы позже дня рождения племянника на срок, не превышающий трех месяцев, т. е. дядя родился бы осенью или зимой, но никак не летом. Поэтому племянник не может быть и старше дяди.

Итак, дядя старше племянника на 21252 дня.

⁵ Хотя это – как сказать. Есть крылатая фраза: «Вся шахматная партия – это один замаскированный ход конем!» Так что...

Теперь определим, в каком веке родился дядя. Здесь, очевидно, возможны два варианта: XIX или XX век. Допустим, дядя родился в XX веке. Так как $58 = 14 \times 4 + 2$, то из 58 идущих подряд лет либо 14, либо 15 високосных, и, следовательно, дядя старше племянника на 58 полных лет плюс либо $82 - 14 = 68$, либо $82 - 15 = 67$ дней, т.е. немногим более двух месяцев. Два летних или осенних идущих подряд месяца могут содержать вместе либо 61 день (например, август + сентябрь), либо 62 дня (только июль + август). Поэтому окончательно дядя старше племянника на 58 полных лет, 2 полных месяца и сверх того либо $67 - 62 = 5$ дней, либо $67 - 61 = 68 - 62 = 6$ дней, либо $68 - 61 = 7$ дней. Но если дядя родился 2-го числа, то племянник мог родиться либо $2 + 5 = 7$ -го, либо $2 + 6 = 8$ -го, либо $2 + 7 = 9$ -го числа, но никак не 10-го! Как же так?

Разгадка в том, что 1900-й год не был високосным. Поэтому, если дядя родился в XIX веке, то из 58 подряд идущих лет либо 13, либо 14 високосных. Если их 13, то дядя старше племянника на 58 полных лет и 69 дней; и если к тому же два идущих подряд месяца — не июль с августом, то дядя старше племянника на 58 лет, 2 месяца и 8 дней, что как раз удовлетворяет условию (ибо $2 + 8 = 10$).

Итак, дядя родился в XIX веке.

Определим месяц его рождения. Так как он, по условию, родился летом, то возможны 3 варианта: 2-е июня, 2-е июля и 2-е августа. Соответствующие даты для племянника: 10-е августа, 10-е сентября и 10-е октября. Первый вариант не подходит: в нем племянник родился не осенью. Второй тоже не годится: разность дней рождения составляет не 69, а 70 дней сверх 58 лет (здесь как раз «влезли» июль с августом, и $31 + 31 + 8 = 70$). Поэтому остается единственная возможность: Сергей Сергеевич родился в августе (а племянник в октябре).

То, что такой ответ корректен, подтверждает пример: Сергей Сергеевич родился 2 августа 1897 года, а его племянник — 10 октября 1955 года. У обоих получается вполне жизнеспособный возраст (на 1992 год — когда статья была впервые опубликована), а разность их возрастов, как легко проверить, составляет ровно 21252 дня.

Какой год?

Для решения этой задачи необходимо иметь некоторые минимальные сведения об Олимпийских играх, известные, впрочем, практически каждому школьнику.

Итак, в некотором году сумма цифр этого года равна возрасту

Петра Петровича. Следовательно, если от номера этого года отнять эту сумму цифр, то получится год его рождения. Но если от любого числа отнять сумму его цифр, то получится число, делящееся на 9. Поэтому год рождения Петра Петровича делится на 9.

Олимпийские игры, как известно, проводятся в годы, делящиеся на 4. Поэтому год рождения делится и на 9, и на 4, а следовательно — на 36. С возрождения Олимпийских игр в 1896 году было лишь три года, делящихся на 36: 1908, 1944 и 1980.

Но в 1944 году Олимпийские игры не проводились — шла вторая мировая война.

1980 год надо отбросить по другой причине: с тех пор не было ни одного года, сумма цифр которого равнялась бы возрасту. В этом легко убедиться, просто перебрав все годы с 1981-го по нынешний. Итак, 1980 год тоже отпадает.

Остается один вариант: Петр Петрович родился в 1908 году. В этом году действительно проводились Олимпийские игры (в Лондоне). Вторая часть условия тоже выполняется: в любой год с 1920-го по 1929-й включительно сумма цифр года как раз равнялась возрасту.

Задача о мармеладе

Разумеется, бессмысленно отвешивать 25 г порциями по 4 г — такая точность для торговых весов заведомо недостижима. С другой стороны, из слов буфетчицы следует, что будь у нее гиря в 25 г — и она смогла бы взвесить требуемое. Поэтому надо найти какие-то предметы общим весом 25 г. Для этого можно, например, использовать медную мелочь, имеющуюся у буфетчицы — у нее-то наверняка наберется 25 копеек медью! В крайнем случае школьник добавил бы свои 4 копейки.

Другой способ основан на словах буфетчицы о том, что у нее имеется гиря весом 50 г. Пусть она взвесит 50 г мармелада, а затем разложит их на две чашки весов, чтобы они уравнились. Тогда на каждой чашке будет как раз 25 г мармелада.

По-видимому, возможны и другие способы.

НОВАЯ ХАНОЙСКАЯ БАШНЯ

Где-то в непроходимых джунглях, недалеко от Ханоя, затерялся древний монастырь бога Браммы. И хорошо, что затерялся, поскольку обитатели его заняты архиважным делом — отвлекать их недопустимо! Давным-давно, когда Брама создавал Вселенную, он воздвиг в этом монастыре три высоких

алмазных стержня и на один из них надел 64 золотых диска (с отверстием в середине каждого). Диаметры всех дисков различны, и они расположены в порядке убывания снизу вверх (т.е. самый большой диск – внизу). Получилась как бы «башня» из дисков (отсюда и название – Ханойская башня). Брами приказал монахам перенести эту башню на другой стержень, соблюдая такие правила: перекладывать диски строго по одному (снимая верхний диск с любого стержня) и всегда класть только меньший диск на больший, но не наоборот. С тех пор монахи работают, не покладая рук, день и ночь. Когда последний диск займет свое место, наступит конец света.

По другим сведениям, указанный монастырь находится в индийском городе Бенаресе... Кому же верить? Или было два монастыря?

Отвечаем: верить не надо *никому*, ибо вся описанная история – с начала и до конца выдумка, причем не очень древняя – ее в 1883 году придумал французский математик Эдуард Люка в качестве сопроводительного текста к изобретенной им головоломке, которая тогда же поступила в продажу. Правда, содержала она не 64 диска, а только 8 (см. рис.1), и золота с алмазами в ней как-то не наблюдалось, но разве в этом дело? Главное – что головоломка в короткий срок приобрела невиданную популярность, да и по сей день не

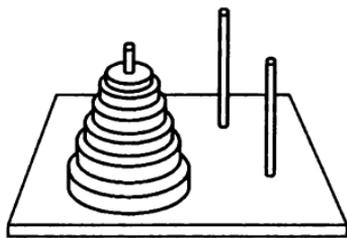


Рис. 1

забыта. Скажите любому математику: «Ханойская башня» – и он моментально поймет, о чем идет речь. И программисты нередко используют ее для проверки своего мастерства.

Не сказать, чтобы математическое содержание головоломки было запредельно трудным, но и примитивным его не назовешь¹. Как только «башня» появилась на свет, математики сразу же поставили два вопроса (для общего случая n дисков, а не только 8 или 64):

1) Можно ли перенести все диски, соблюдая указания Брами (или, если хотите, не Брами, а Люка – это не суть важно)?

¹ Например, американский ученый Д. Кроув обнаружил теснейшую, чуть ли не родственную связь «Ханойской башни» для случая n дисков с так называемыми Гамильтоновыми путями на ребрах n -мерного куба! Об этом сообщает Мартин Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1972).

2) Если такое сделать можно, то какое наименьшее число ходов для этого потребуется? (Ходом мы называем снятие диска с одного стержня и надевание его на другой).

Ответ на первый вопрос оказался положительным. Доказать это можно индукции. Сначала для удобства назовем стержень, на который были надеты диски, стержнем A , и требуется переместить всю «башню» на стержень B . Третий стержень обозначим буквой C . Случай $n = 1$ очевиден. Пусть n дисков можно переместить со стержня A на стержень B . Наденем на стержень A на 1 диск больше. Переместим верхние n дисков со стержня A на стержень C (очевидно, это возможно – используем существующий способ перемещения дисков со стержня A на стержень B , но стержни B и C мысленно поменяем местами). Нижний, самый большой диск при этом не трогаем – он никому не мешает. После того, как все n дисков благополучно «перелезли» на стержень C , перенесем самый большой диск на пустой стержень B , после чего таким же способом перемещаем всю «башню» со стержня C на стержень B . Готово!

Разобраться с *наименьшим* числом требуемых ходов можно с помощью все той же индукции. Пусть для n дисков оно равно X_n . Найдем X_{n+1} . В процессе работы рано или поздно придется снимать самый большой диск со стержня A . Так как этот диск можно надевать только на пустой стержень (иначе он «придавит» меньший диск, что запрещено), то все верхние n дисков придется предварительно перенести на третий стержень. Для этого потребуется не меньше X_n ходов. Далее переносим наибольший диск на пустой стержень – вот еще один ход. Наконец, чтобы сверху его «притиснуть» меньшими n дисками, опять потребуется не меньше X_n ходов. Итак, $X_{n+1} \geq X_n + 1 + X_n = 2X_n + 1$. С другой стороны, описанные выше действия показывают, как можно справиться с задачей именно $2X_n + 1$ ходами. Поэтому окончательно $X_{n+1} = 2X_n + 1$. Получено рекуррентное соотношение, но для того, чтобы его привести к «нормальному» виду, надо еще найти X_1 . Ну, это проще простого: $X_1 = 1$ (меньше просто не бывает!). Не составляет труда, основываясь на этих данных, выяснить, что $X_n = 2^n - 1$.

Найденное выражение позволяет нам оценить срок наступления конца света (по версии Люка, конечно). Если предположить, что монахи делают ходы безошибочно (все-таки не кто-нибудь – сам Брама руководит!), перенося по одному диску в секунду, то полное затраченное время составит $2^{64} - 1 =$

= 18446744073709551615 с², что составляет почти 600 миллиардов лет! Спасибо за такой прогноз – он весьма оптимистичен. По современным космологическим представлениям, Вселенная существует не более 20 миллиардов лет, и осталось ей примерно столько же (во всяком случае, Солнце станет белым карликом, испепелив мимоходом Землю, не позже чем через 10 миллиардов лет). Если же монахи сопровождают перенос каждого диска пусть даже очень короткими молитвами, то отпущенное нам время еще более возрастает. Эх, если бы так!

Конечно, если кто-то попытается «напрямую» применить вышеуказанный «индуктивный» способ переноса дисков хотя бы для $n = 8$ (как в исходной головоломке Люка), то он неизбежно запутается и наделает ошибок. Поэтому для облегчения работы был изобретен остроумный алгоритм, описывающий оптимальный способ перекладки дисков. Он заключается в следующем:

- мысленно расположить стержни «по кругу» (т.е., проще говоря, провести окружность через три точки – основания стержней);

- все *нечетные* ходы делать, перенося *самый маленький* диск, причем всегда *по часовой стрелке* (или всегда против часовой стрелки – получится «зеркальный» вариант);

- все *четные* ходы делать, перенося *не самый маленький* диск – этот диск можно выбрать единственным способом и перенести его на единственное допустимое место (разберетесь, почему?).

Оказывается, такой способ гарантирует перемещение «башни» из n дисков на другой стержень ровно за $2^n - 1$ ходов.

А теперь вернемся из нашей познавательной экскурсии в прошлое. Почему-то большинство исследователей «Ханойской» задачи не обращали внимания на такое довольно естественное усложнение условий перекладки дисков: *а если запрещено перекладывать диски сразу с «исходного» стержня на «итоговый» (т.е. с А на В), т.е. можно «обмениваться» дисками только между «крайними» стержнями и «промежуточным» стержнем С? Можно ли в этом случае выполнить приказ Браммы?*

На первый взгляд успех такого предприятия представляется более чем сомнительным: ведь такой запрет резко ограничивает

² Между прочим, это число в точности совпадает с количеством пшеничных зерен, которые, по легенде, должен был получить изобретатель шахмат Сета (см. рассказ **Лавина для полководца**). Как видим, индусы в этом отношении отсутствием аппетита не страдают!

наши возможности (как бы не получился «затор» в районе промежуточного стержня!). Тем не менее, оказывается, можно! Правда, повозиться придется дольше, чем ранее, но успех все же гарантирован. Для доказательства опять-таки используем индукцию по числу дисков.

Для $n = 1$ диска нет проблем, хотя потребуется не 1, а 2 хода (сначала диск переносим с A на C , затем с C на B).

Пусть n дисков перенести можно. Добавим еще один. Сначала переносим верхние n дисков на стержень B (по индуктивному предположению, это возможно). Затем нижний стержень перемещаем с A на C . Потом всю «башню» переносим обратно с B на A (лежащий на C наибольший диск, очевидно, ничему не мешает). Далее делаем еще один «шаг» наибольшим диском – перекладываем его на опустевший стержень B . Наконец, вновь переносим «башню» из n дисков с A на B . Все!

Как видим, верхним n дискам пришлось совершить «путешествие из конца в конец» трижды, чтобы дать свободный путь наибольшему диску. С другой стороны, нетрудно заметить, что меньшими усилиями не обойтись. Поэтому если обозначить наименьшее потребное число ходов через Y_n , то имеем: $Y_1 = 2$; $Y_{n+1} = 3Y_n + 2$. Такие рекуррентные соотношения легко приводятся к «явному» виду: $Y_n = 3^n - 1$. Вроде бы изменение невелико (в каких-то полтора раза для каждого лишнего диска), но с ростом n оно становится огромным. Во всяком случае, для тех же 64 дисков, что находятся в древнем храме, общее затраченное время составит более 10^{23} лет – величина совершенно несусветная!).

Естественно, решение головоломки Люка с новым ограничением становится гораздо сложнее, но, как ни странно, алгоритм для «практической работы» сформулировать совсем не трудно, и он даже оказывается едва ли не проще того, что был придуман для «исходной» задачи:

- все *нечетные* ходы делать, перенося *самый маленький* диск либо со стержня A на стержень B (естественно, двумя ходами, через промежуточный стержень C), либо наоборот – в зависимости от того, где этот диск находится;
- все *четные* ходы делать, перенося *не самый маленький* диск – этот диск можно выбрать единственным способом и перенести его на единственное допустимое место.

«Ханойская башня» породила немало и других задач, связанных с перемещением дисков с одного стержня на другой при помощи третьего. Иногда эти диски все одинакового размера.

ра относится к длине шестой части периметра (равной, в свою очередь, стороне шестиугольника) как высота правильного треугольника к его стороне, т.е.

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ (рис.1). Более того, можно

показать, что ни для какого правильного многоугольника такое равенство невозможно. Действительно, рассмотрим правильный n -угольник. Если перпендикуляр от середины стороны к центру равен 1, то длина

стороны равна $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, периметр — $2n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, и шестая часть

периметра — $\frac{n}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$. Так как тангенс острого угла всегда больше

самого угла, то $\frac{n}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{n}{3} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3} > 1$. Поэтому шестая часть

периметра всегда *больше* перпендикуляра.

А если под словами «шестая часть периметра» просто имелись в виду слова «сторона многоугольника»? Для шестиугольника это одно и то же, но, может быть, для другого правильного многоугольника удастся достичь равенства перпендикуляра стороне? Ответ на этот вопрос сводится к решению уравнения

$2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} = 1$, откуда $n = \frac{\pi}{\arctg\frac{1}{2}} \approx 6,776$, т.е. плану крепости

почти идеально соответствует 6,776-угольник. Правда, такие многоугольники в природе пока не встречаются.... Ближайшей к нему реальностью может служить семиугольник, для которого

отношение перпендикуляра к стороне равно $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{7} = 1,038 \dots$ Это

гораздо ближе к единице, чем то же отношение для шестиугольника, но все же не равно ей.

Тем не менее, Портосу удалось успешно построить укрепления в соответствии с планом. За давностью лет трудно сказать, как он сумел справиться с задачей без привлечения неевклидовой геометрии. Можно лишь утверждать, что вряд ли Портос вносил в ходе работ коррективы в план, так как он был всего лишь исполнителем. Настоящим же автором плана являлся Арамис. В этом мы убеждаемся, читая ту же XXII главу:

«Хотя д'Артаньян продержал его (план) очень недолго, тем не менее под крупным почерком Портоса он разглядел гораздо более мелкие буквы, напоминавшие ему почерк, который он в

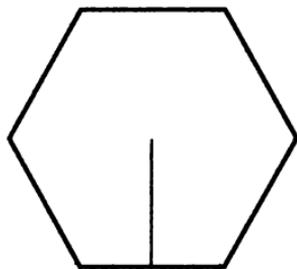


Рис. 1

ПОЧЕМУ ПОРТОС И АРАМИС НЕ УДЕРЖАЛИ КРЕПОСТЬ БЕЛЬ-ИЛЬ?

Франция второй половины XVII века... Его Величество Людовик Четырнадцатый методично и безжалостно разоряет суперинтенданта финансов Фуке, отбирая у него деньги, земли, имущество. В числе владений опального Фуке была и крепость Бель-Иль, расположенная на одноименном острове неподалеку от города Ванн, где на тот момент в сане епископа служил д'Эрбле, более известный нашим читателям под именем Арамиса. Но, несмотря на то, что этот весьма незаурядный человек приложил массу усилий для того, чтобы сохранить суперинтенданту его вотчину, победа досталась королю. А ведь крепость была превосходно спланирована, укреплена и вооружена, и способна выдержать даже длительную осаду. Почему же она сдалась?

В знаменитом романе А. Дюма «Виконт де Бражелон» можно найти подробные и очень захватывающие объяснения этому событию. Однако последние прочтения романа дают основания полагать, что причина заключалась также и в другом, а именно – в проектировании системы обороны упомянутой крепости. Давайте обратимся к XXII главе второй части романа, где Портос (тогдашний соратник Арамиса, руководивший строительными работами) дал прочесть д'Артаньяну, обманом проникшему на остров, составленный им план:

«Вместо квадрата или прямоугольника, как это делалось до сих пор, придайте площади вид правильного шестиугольника. Этот многоугольник имеет то преимущество, что в нем больше углов, чем в четырехугольнике. Каждую сторону вашего шестиугольника (размер которого вы определите на месте) разделите пополам...»

Пока все ясно и вопросов не вызывает. Но читаем дальше:

«От средней точки вы проведете перпендикуляр к центру многоугольника; он будет равняться длине шестой части периметра...»

Стоп! Что-то неладно. Перпендикуляр вовсе не будет равен шестой части периметра! Легко видеть, что длина перпендикуля-

ра относится к длине шестой части периметра (равной, в свою очередь, стороне шестиугольника) как высота правильного треугольника к его стороне, т.е.

$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$ (рис.1). Более того, можно

показать, что ни для какого правильного многоугольника такое равенство невозможно. Действительно, рассмотрим правильный n -угольник. Если перпендикуляр от середины стороны к центру равен 1, то длина

стороны равна $2\text{tg}\frac{\pi}{n}$, периметр — $2n\text{tg}\frac{\pi}{n}$, и шестая часть

периметра — $\frac{n}{3}\text{tg}\frac{\pi}{n}$. Так как тангенс острого угла всегда больше

самого угла, то $\frac{n}{3}\text{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{n}{3} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{3} > 1$. Поэтому шестая часть

периметра всегда *больше* перпендикуляра.

А если под словами «шестая часть периметра» просто имелись в виду слова «сторона многоугольника»? Для шестиугольника это одно и то же, но, может быть, для другого правильного многоугольника удастся достичь равенства перпендикуляра стороне? Ответ на этот вопрос сводится к решению уравнения

$2\text{tg}\frac{\pi}{n} = 1$, откуда $n = \frac{\pi}{\arctg\frac{1}{2}} \approx 6,776$, т.е. плану крепости

почти идеально соответствует 6,776-угольник. Правда, такие многоугольники в природе пока не встречаются.... Ближайшей к нему реальностью может служить семиугольник, для которого

отношение перпендикуляра к стороне равно $2\text{tg}\frac{\pi}{7} = 1,038 \dots$ Это

гораздо ближе к единице, чем то же отношение для шестиугольника, но все же не равно ей.

Тем не менее, Портосу удалось успешно построить укрепления в соответствии с планом. За давностью лет трудно сказать, как он сумел справиться с задачей без привлечения неевклидовой геометрии. Можно лишь утверждать, что вряд ли Портос вносил в ходе работ коррективы в план, так как он был всего лишь исполнителем. Настоящим же автором плана являлся Арамис. В этом мы убеждаемся, читая ту же XXII главу:

«Хотя д'Артаньян продержал его (план) очень недолго, тем не менее под крупным почерком Портоса он разглядел гораздо более мелкие буквы, напоминавшие ему почерк, который он в

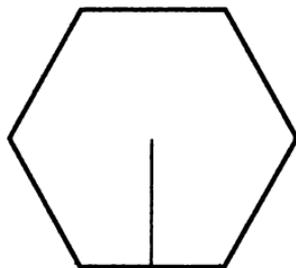


Рис. 1

молодости видел в письмах к Мари Мишон; только над этими буквами так усердно поработала резинка, что для всякого человека, менее проницательного, нежели наш мушкетер, следы стертых строк были бы незаметны.»

У нас нет оснований сомневаться в добросовестности Порто-са, и поскольку он построил укрепления в точном соответствии с вопиюще ошибочным планом, то их неприступность наверняка оказалась вовсе не такой абсолютной, как ожидалось. Результат известен: Портос погиб, а Арамису чудом удалось скрыться.

Можно предложить такую поправку к плану: вместо перпендикуляров к центру многоугольника проводить отрезки, соединяющие центр многоугольника с его вершинами. Эта единственная корректива вроде бы ставит все на свои места. Можно было бы подумать о банальной опечатке, если бы не двукратное повторение слова «перпендикуляр» и не требование разделить стороны шестиугольника пополам (что совершенно не нужно в новом варианте).

Еще одна версия: ошибки переводчика, но ее могут проверить лишь те читатели, которые, во-первых, имеют роман в подлиннике, и во-вторых, владеют французским языком (ни тем, ни другим похвастаться не могу). А может быть, имеются еще какие-то мнения?

СВИНСКАЯ ИСТОРИЯ

Из множества знаменитых плоских кривых, получивших за особые заслуги в развитии математики собственные имена (гипербола, парабола, эллипс, эпи- и гипоциклоиды, трактриса, конхоида и так далее очень долго) как-то по-особому выделяется *линия погони*. В общем случае она описывается так. Пусть на некоторой заданной кривой L находится точка A , и, кроме того, на плоскости имеется дополнительная точка B . Одновременно точки A и B начинают движение: точка A движется по кривой K с постоянной скоростью u , а точка B — с постоянной скоростью v , причем вектор скорости точки B постоянно направлен на точку A . Траектория движения точки B как раз и является линией погони.

Очевидно, форма кривой зависит не от абсолютных значений скоростей u и v , а от их соотношения $k = v/u$.

Несмотря на хорошую наглядность описания процесса движения, вывести аналитическое выражение линии погони — очень непростая задача. Поэтому хорошо изучен лишь частный ее случай: когда точка A движется прямолинейно по некоторому лучу l от начальной точки A_0 в бесконечность (или пока точка

B ее не догонит). Далее будем под линией погони понимать именно такой случай.

Зададимся следующим вопросом: при каком k точка B догонит точку A ?

Очевидно, если $k > 1$, то догонит несомненно. Действительно, рассмотрим отрезок AB в произвольный момент времени. В проекции на этот отрезок точка B приближается к точке A со скоростью v , а точка A , наоборот, удаляется от B , но со скоростью *не больше* u . Поэтому погоня завершится заведомо не позже, чем за время $\frac{S}{v-u}$ (где S – первоначальное расстояние между A и B).

Ну, а если $k \leq 1$ – что тогда? Естественно считать, что исход зависит от первоначального положения точки B (которое мы обозначим B_0). В каком-то смысле это верно: если точка B_0 находится *на самом луче* l , то точки A и B будут «бежать» прямо навстречу друг другу и сойдутся через время, равное $\frac{S}{v+u}$. По-видимому, если B_0 находится где-

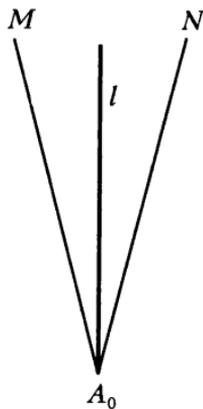


Рис. 1

то поблизости от луча l , то успех тоже вроде бы обеспечен... Другое дело, если точка B_0 изначально лежит где-то позади точки A_0 . В общем, при обдумывании в голове постепенно вырисовывается некая «остроконечная» область MA_0N , изображенная схематично на рис.1 (здесь луч l идет от точки A_0 вверх). Если точка B_0 находится выше «бесконечной ломаной» MA_0N , то цель будет достигнута, а если ниже, то нет. Осталось выявить, что собой представляют линии A_0M и A_0N (они вовсе не обязаны быть хотя бы прямыми), однако... не будем этого делать. Почему? Да потому, что *все не так!* На самом деле ситуация иная: если точка B_0 не принадлежит лучу l , то точка B *никогда не догонит* точку A . Все это очень убедительно и доходчиво разъяснено в статье М.Гервера «Про лису и собаку», опубликованную во 2-м номере «Кванта» за 1973 год. Оказывается, через некоторое время после начала движения точка B неизбежно оказывается *ниже* точки A , и в дальнейшем расстояние между ними только увеличивается. Между прочим, то же имеет место и при $k > 1$, но здесь у точки B есть преимущество в скорости, за счет чего она в конце концов и настигает точку A .

Есть и другие удивительные свойства у линии погони. Одну

из них умело использовал великий изобретатель головоломок Сэм Ллойд. Вот одна из них (опубликована в книге «Математическая мозаика», М., «Мир», 1980):

*Герой одной из сказок Матушки-Гусыни Том, сын трубача, решил украсть свинью. Когда он побежал за свиньей, то находился в 250 ярдах к югу от нее. И свинья, и Том побежали одновременно с постоянными скоростями. Свинья бежит в восточном направлении. Том сгоряча бежит так, что в каждый момент движется точно на свинью. Предположим, что Том бежит в $4/3$ раза быстрее, чем свинья. Как далеко убежала свинья, прежде чем ее удалось схватить?*¹

Никто не будет отрицать, что в данном случае мы имеем дело как раз с линией погони. Но это не дает никакой «наводки» к решению. Что же нам делать – вводить систему координат, составлять дифференциальное уравнение и т.д.? Неужели неистощимый выдумщик и весельчак Сэм Ллойд решал задачу таким образом? На него что-то не похоже... И действительно, Ллойд справился с задачей гораздо более лихо, как это сделал бы типичный современный инженер, который еще с институтской скамьи не вполне в ладах с высшей математикой, и потому не будет даже пытаться составить дифференциальное уравнение, а уж тем более его решить. Но сроки установлены, работа включена в план, и грозит лишение премии. И тогда несчастный инженер действует просто и незатейливо. «Допустим, – рассуждает он, – свинья бежит не на восток, а на юг, т.е. навстречу

Тому. Тогда он ее поймает за время $t_1 = \frac{a}{v+u}$, где $a = 250$ ярдов – начальное расстояние (v и u – как и прежде, скорости). Затем допустим, что свинья бежит, наоборот, прямо на север, т.е.

строго прочь от Тома. Тогда он настигнет ее за время $t_2 = \frac{a}{v-u}$.

Бегство же свиньи на восток, очевидно, является чем-то промежуточным, и время погони за ней будет лежать где-то между t_1 и t_2 . Будем считать его равным их среднему арифметическому. Если это и приведет к ошибке, то, скорее всего, к небольшой – в пределах допустимой погрешности инженерных расчетов. Тогда свинья успеет пробежать путь, равный:

$$u \frac{t_1 + t_2}{2} = u \frac{\frac{a}{v+u} + \frac{a}{v-u}}{2} = \frac{a u v}{v^2 - u^2}.$$

¹ Эту задачу можно было бы давать под популярным когда-то лозунгом: «Продовольственная программа – дело всенародное!»

Правда, неизвестны скорости Тома и свиньи, но зато известно их отношение $k = v/u = 4/3$. Поделив числитель и знаменатель последней дроби на u^2 , окончательно получим путь свиньи: $s = \frac{ak}{k^2 - 1} = 250 \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{16}{9} - 1\right)^{-1} = 428 \frac{4}{7}$ ярдов. Что ж, за неимением лучшего можно обойтись и таким явно эвристическим решением, но самое поразительное заключается в том, что оно является *абсолютно точным!* Т.е. Лойд дал совершенно правильный ответ, но строго его не обосновал. Это типично в его духе.

Вот какова она – линия погони. Действительно, в ряде случаев ее длину можно найти, не прибегая к высшей математике. Ну, а кто жаждет математической строгости, может, например, обратиться к книге А.Савелова «Плоские кривые», М.: Физматлит, 1960 – здесь мы на это отвлекаться не будем. В данном случае нас интересует именно Лойдовская «свинская» задача. Прежде чем читать дальше, прошу еще раз внимательно осмыслить ее условие. Готово? Ну, тогда попробуйте ответить на вопрос: можно ли, не нарушая условия, поймать свинью быстрее, т.е. сократить длину ее «свободного пробега»? Только не надо заставлять бежать ее по оврагам и буеракам: этак мы и сами забредем неизвестно куда. Будем считать, что местность идеально ровная. Как ни странно, но, оказывается, можно уменьшить пробег свиньи *в несколько раз*, ничуть не противореча условию! Не верите? Сейчас убедитесь. Для этого надо всего лишь учесть, что Земля имеет форму шара...

«Минуточку! – возразит возмущенный читатель. – Да ведь на таких расстояниях – жалкие сотни ярдов! – сферичность Земли не может заметно сказаться. Разве что на доли миллиметра, не более!». Однако разрешите закончить мысль: Земля имеет форму шара, и координатная сетка на ней представляет собой систему параллелей и меридианов, причем параллели – это окружности, радиусы которых уменьшаются по мере удаления от экватора к полюсам. Движение же свиньи на восток – это как раз движение по параллели. Теперь, видимо, идея прояснилась. Перенесемся мысленно на Северный полюс². Пусть в начальный момент свинья находится очень близко от полюса. Тогда ее бег на восток будет представлять собой движение по маленькой окружности с центром в полюсе, а путь Тома – некоторую волнообразную кривую с увеличивающимся разма-

² Бррр!

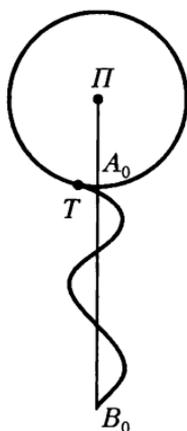


Рис. 2

хом (рис.2); здесь буквой Π обозначен полюс, а буквой T – точка долгожданной встречи Тома и свиньи.

Дифференциальное уравнение этой кривой будет, конечно, весьма непростым, а о решении и говорить не приходится (неизвестно даже, можно ли записать его в удобочитаемом виде). Но нам это и не требуется. Заметим, что устремив радиус окружности к нулю, мы заставляем свинью почти что топтаться на месте, попирая ногами земную ось. Тогда путь Тома все более приближается к отрезку прямой, соединяющему точки B_0 и A_0 (одновременно точка A_0 сближается с точкой Π), и длина пути Тома будет стремиться к длине отрезка A_0B_0 , равной

250 ярдам. Путь же свиньи (путь, а не перемещение, которое практически отсутствует) устремится к $250 \cdot \frac{3}{4} = 187,5$ ярдам, что в 2,29 раза меньше найденного Лойдом значения $428 \frac{4}{7}$. Весомое достижение!

Кажется невероятным, но и его можно превзойти, причем значительно. «Как же так? – спросит читатель. – Ведь для этого надо, чтобы путь Тома до поимки свиньи стал *меньше* первоначального расстояния, их разделяющего! Мыслимо ли такое?». Да, мыслимо. Для этого надо (всего лишь!) перенестись с Северного полюса примерно на 12700 километров... *вниз*, поскольку именно там расположен другой полюс Земли – Южный³. Теперь снова обдумаем выражение «в начальный момент Том находится к югу от свиньи». Как это понимать? Очевидно, наиболее подходящее объяснение таково: если свинья посмотрит на юг, она увидит Тома. Более точно (хотя и несколько кровожадно) можно сформулировать так: если бы у свиньи было ружье, и она бы выстрелила точно на юг, то пуля попала бы в Тома. Но к чему вся эта казуистика? А вот к чему: пусть Том и свинья занимают такие исходные позиции, что Южный полюс лежит *между ними* – на отрезке, их соединяющем. Тогда, в соответствии с нашими рассуждениями, Том все-таки находится к югу от свиньи (и, как ни парадоксально, свинья тоже находится к югу от Тома). Допустим, радиус окружности, по которой бежит свинья, подобран таким образом, что Том настигнет ее еще

³ Брррр еще раз.

до того, как она пробежит половину окружности (рис.3). Как видно, тогда он схватит ее *на встречном курсе*, и это позволит существенно сократить время погони (ибо свинья сама будет бежать к Тому, хотя и не по прямой). Но при каком радиусе это время будет наименьшим? Как ранее, пытаться составить и решить дифференциальное уравнение траектории – дело гиблое. Простые рассуждения тоже не подходят (здесь путь Тома вовсе не похож на движение по прямой). Как же быть? На счастье, случайно под рукой оказался компьютер (и если у читателя тоже случайно имеется компьютер, то он может убедиться в правдивости изложенного ниже; иначе придется поверить на слово). Осталось лишь смоделировать процесс погони и подобрать радиус, при котором ее время минимально (уж что-что, а перебор на компьютере организовать проще простого⁴). Не будем подробно расписывать алгоритм и приводить текст программы. Ограничимся лишь краткими соображениями о сути алгоритма. Процесс погони был смоделирован в виде маленьких шагов. На каждом шаге сначала определяется вектор, соединяющий текущие положения Тома и свиньи (его длина и направление). Затем от местонахождения Тома вдоль этого вектора откладывается шаг Тома, после чего свинья передвигается по окружности на величину своего шага, равного $3/4$ шага Тома. Такие шаги производятся до тех пор, пока в очередной раз длина вектора не окажется меньше шага Тома. Осталось умножить число шагов на шаг свиньи, и получится путь свиньи до поимки. Понятно, что чем меньше шаг, тем точнее результат. Но злоупотреблять уменьшением шага тоже нельзя – возрастает время вычислений. В данном случае шаг Тома был принят равным 0,001 ярда (а свиньи – соответственно 0,00075 ярда).

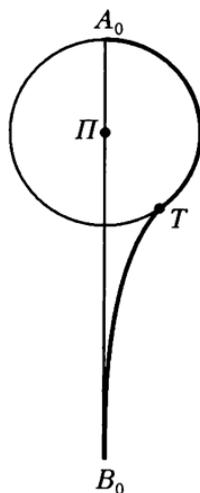


Рис. 3

Что же показал компьютер? Оказывается, действительно существует радиус, при котором время погони минимально. Он равен с точностью до десятых долей 54,3 ярдам. При этом путь свиньи составляет 125,3 ярда, и она успеет переместиться по окружности на 132° (т.е. пробежит чуть больше трети окружности). Итак, трюк с переносом места действия из Арктики в Антарктиду дал возможность уменьшить путь свиньи в

⁴ Для хорошего программиста, естественно!

$428\frac{4}{7} : 125,3 = 3,42$ раза! Правда, нежарко там пришлось бы Тому (да и свинье!), но ради такого эффекта можно потерпеть. И все-таки, невзирая на достигнутый успех, нет-нет, да и выплывает вопрос: а нельзя ли побить и этот рекорд? Всякое бывает...

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СТРАДАНИЯ

Геодезической линией называется кратчайшая кривая, соединяющая две указанные точки на заданной поверхности (и, естественно, лежащая на этой поверхности). Для некоторых поверхностей геодезическая линия определяется весьма просто. Скажем, для плоскости это отрезок прямой, а для сферы – дуга большого круга. Но в большинстве случаев (особенно, когда поверхность криволинейная) задача поиска геодезических линий чрезвычайно трудна. Оно и неудивительно – ведь здесь приходится искать не просто какое-либо экстремальное значение (или точку), а целую *линию* – задача, в общем случае, для вариационного исчисления.

Однако в ряде случаев поиск геодезических линий довольно прост, если поверхность представляет собой многогранник. Для них разработан превосходный метод *развертки*, позволяющий получить результат буквально «на пальцах», без привлечения средств высшей математики. Кто его изобрел – неизвестно, возможно даже, что несколько математиков независимо друг от друга. Оно и понятно – такая идея, что называется, носится в воздухе, «заражая» всех, кого зацепила!

Блестящим примером эффективности указанного метода является задача, впервые опубликованная замечательным мастером математических головоломок Генри Дьюдени еще в 1905 г. Итак, комната (прямоугольный параллелепипед) имеет размеры: 30 футов в длину и по 12 футов в ширину и высоту. Посредине одной из меньших боковых стен (размеры которой 12×12 футов) на расстоянии 1 фута от потолка сидит паук, а в точке, симметричной относительно центра комнаты (т.е. на противоположной стене на расстоянии 1 фута от пола) сидит муха, оцепеневшая от страха и потому не способная двигаться. Какой кратчайший путь должен пробежать паук, чтобы схватить муху?

Первой (и вполне естественной) мыслью является такая: паук сначала бежит вертикально вверх до потолка, затем по потолку параллельно длинной стороне комнаты, и далее – вниз (на рис. 1 жирной линией показан его путь; точки *П* и *М* – исходные

положения паука и мухи; длина пробега паука, как легко видеть, составляет $1 + 30 + 11 = 42$ фута). Возможен, разумеется, и центрально-симметричный маршрут такой же длины.

При этом есть довольно убедительные аргументы в пользу того, что именно такой путь – наименьший по длине. А именно: *развернем* стены комнаты так, чтобы они оказались в одной плоскости с потолком (рис.2). Тогда сразу становится ясно, что меньше,

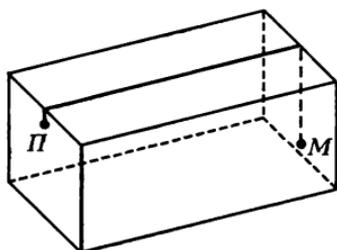


Рис. 1

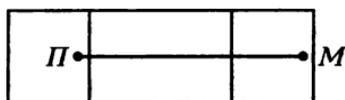


Рис. 2

чем 42 футами не обойтись – ведь длина отрезка $ПМ$ как раз равна 42 футам.

Вот как «работает» метод развертки. Все, вроде бы, четко и ясно, но, тем не менее, *неправильно!* Оказывается, разворачивать-то можно по-разному – в этом и состояла хитрость Дьюдени. Если «задействовать» еще и боковые стены комнаты, то развертка получается другая (рис.3), и кратчайший путь становится гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами длиной 24 и 32 фута, т.е. равен $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ футам. Два фута сэкономили! Обратим внимание: здесь пауку приходится посетить и пол, и потолок, и три стены из четырех возможных. Лишь бы только голова не закружилась, и он с дороги не сбился ¹!

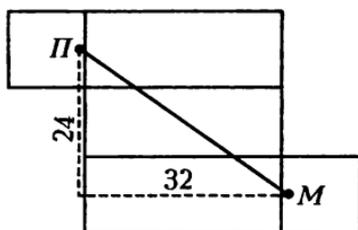


Рис. 3

Такова особенность (может быть, не очень-то приятная) метода разверток: они могут быть различны, и главное здесь – не

¹ Шутки шутками, но нередко краткостью пути пренебрегают в пользу хорошей ориентировки. Например, как мы уже отмечали, геодезическая линия на сфере – это дуга большого круга. Но частенько (особенно в прошлые века, при неустойчивой радиосвязи) капитаны судов предпочитали прокладывать курс по другой кривой – *линии постоянного курса* (или *локсодроме*), составившей постоянный угол с направлением магнитной стрелки компаса. Она несколько длиннее, чем дуга большого круга, зато легче выдерживать направление и гораздо меньше риск заблудиться в бескрайних просторах океана.

упустить какую-нибудь из них². В остальном же метод выше всяких похвал.

Более того, он применим не только к многогранным поверхностям, но зачастую и к криволинейным поверхностям, допускающим развертку на плоскости. Например, коническим. Широко известна задача: дан прямой круговой конус радиусом R и высотой H (без днища). Найти длину геодезической линии между двумя диаметрально противоположными точками основания. Решите ее сами – это несложно.

Со времени открытия метода развертки было придумано множество задач, в решении которых он с успехом используется. Но, как ни странно, оказалась практически обойдена вниманием вполне естественная задача, которую мы назовем так: «*Муравей на консервной банке*». Условие ее таково. Консервная банка представляет собой прямой круговой цилиндр радиусом R и высотой H . В некоторой точке A на окружности одного из оснований сидит муравей, который хочет переползти в наиболее удаленную от него точку B на окружности другого основания (очевидно, точки A и B симметричны относительно центра банки). Требуется найти длину геодезической линии.

Предвосхищая ответ, скажем сразу: хотите верить, хотите нет, но путь муравья принципиально зависит от *содержимого* банки! Т.е., скажем, если это банка со сгущенкой, то ответ будет один, а если со шпротами – то другой. Сомневаетесь? Читайте дальше и убедитесь!

Поскольку цилиндр ничуть не хуже конуса разворачивается на плоскость, то так и сделаем: развернем банку (рис.4) и сразу получим, что кратчайший путь – сначала по образующей AM (длина отрезка равна H), затем по диаметру основания MB (длина отрезка $2R$). Длина геодезической линии при этом равна $L = H + 2R$. (Разумеется, возможен и симметричный путь – сначала по диаметру второго основания, потом – по образующей; длина его, конечно, такая же).

Памятуя все же о том, что развертка может быть сделана не единственным образом, попробуем еще какой-нибудь способ.

² Например, есть еще один возможный путь паука: не через потолок, а через боковую стену. Однако, он длиннее даже самого первого, рассмотренного нами: более 43 футов!

Надо сказать, это удается без труда. Отбросим доньшко вообще – пусть муравей бежит только по боковой поверхности! Тогда длина геодезической будет представлять собой гипотенузу прямоугольного треуголь-

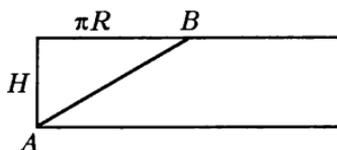


Рис. 5

ника с катетами H и πR (рис.5), т.е. $L = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2}$ (это на развертке, а «в натуре», т.е. на банке, получится отрезок винтовой линии).

Итак, имеются аж два кандидата на кратчайший путь. Какой же из них короче? Чтобы в этом разобраться, давайте-ка их приравняем и преобразуем:

$$H + 2R = \sqrt{H^2 + \pi^2 R^2} ,$$

$$(H + 2R)^2 = H^2 + \pi^2 R^2 ,$$

$$4H = (\pi^2 - 4) R ,$$

$$\frac{H}{R} = \frac{\pi^2}{4} - 1 \approx 1,467 .$$

Далее уже нетрудно получить, что кратчайший путь зависит от соотношения между высотой и радиусом банки. Если это отношение меньше $\frac{\pi^2}{4} - 1$, то геодезической линией является путь, указанный на рис.4, если же оно больше $\frac{\pi^2}{4} - 1$, то геодезическая дана на рис.5. Отсюда, кстати, и следует казавшееся ранее необъяснимым соотношение между наилучшим путем муравья и содержимым банки. Действительно, для стандартной банки со сгущенкой $\frac{H}{R}$ приблизительно равно 2,25, для шпрот же соотношение иное – около 0,3. Вот и весь секрет!

К сожалению, не весь. Решение-то снова *неверное!* Т.е. мы решили задачу, но... другую. А именно: взяли два возможных пути из A в B и сравнили их. Но ведь возможно еще бесчисленное множество «промежуточных» путей: сначала по винтовой линии от точки A до некоторой точки P на

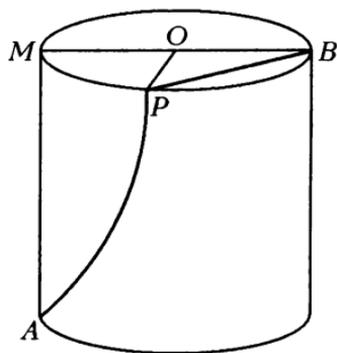


Рис. 6

окружности другого основания, а уж затем по отрезку прямой PB (рис.6). Как видно, в рассмотренных нами вариантах имели место два частных случая: точка P совпадает либо с M , либо с B . Истина же, несомненно, где-то посредине.

Обозначим центр верхнего основания через O , и пусть $\angle MOP = \varphi$ (в радианах, конечно). Тогда длина дуги MP равна $R\varphi$, и потому длина отрезка винтовой линии AP составляет $\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}$ (понятно, почему?). Длина второй части пути – отрезка PB – легко определяется с помощью тригонометрии: $PB = 2R \cos \frac{\varphi}{2}$. Итого протяженность всего маршрута муравья:

$$L = \sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} + 2R \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Осталось всего ничего: найти минимум этой функции на участке $\varphi \in [0; \pi]$. Как это сделать – известно. Минимум может достигаться либо на одном из концов отрезка, либо где-то внутри. Что касается концов, то с ними мы уже разобрались (два рассмотренных выше маршрута соответствуют значениям $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$). Ну, а для «внутренности» как нельзя лучше подходит дифференциальное исчисление. Возьмем производную и приравняем ее к нулю:

$$L' = \frac{R^2\varphi}{\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2}} - R \sin \frac{\varphi}{2} = 0.$$

Все значения φ , для которых выполняется это равенство, являются *подозрительными на экстремум*; если функция внутри интервала имеет локальные экстремумы, то они могут достигаться только в таких точках. Поэтому следующий шаг – решить полученное уравнение, и здесь-то мы упираемся в закрытую дверь, потому что *оно не решается*, т.е. выразить φ через H и R никоим образом не удается³!

Что в таких случаях приходится делать? Идти в обход! Вспомним следующий признак локального минимума: для него не только производная равна 0, но и *вторая производная положительна*! Ну, так возьмем вторую производную:

$$L'' = \frac{R^2 H^2}{(\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2})^3} - \frac{R}{2} \cos \frac{\varphi}{2}.$$

³ Это называется: картина Репина «Приплыли!»

Выясним знак L'' при таких значениях φ , когда первая производная обращается в нуль. Для этого из предыдущего уравнения находим:

$$\sqrt{H^2 + R^2\varphi^2} = \frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} ;$$

$$H^2 = \left(\frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^2 - R^2\varphi^2 = R^2\varphi^2 \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} .$$

Подставим эти значения в выражение для L'' :

$$L'' = \frac{R^2 \cdot R^2\varphi^2 \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{\left(\frac{R\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right)^3} - \frac{R}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \varphi \right) =$$

$$= \frac{R}{2\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} (\sin \varphi - \varphi) .$$

При $0 < \varphi < \pi$ множитель перед последней скобкой положителен, а выражение в скобках – наоборот, отрицательное. Поэтому если $L' = 0$, то $L'' < 0$, и, стало быть, локального минимума внутри отрезка ожидать не приходится (в лучшем случае – будет локальный максимум, но он нам не нужен). Поэтому минимум достигается на одном из концов отрезка, но эти случаи мы уже разобрали. Поэтому наше первоначальное решение было верным! Или все-таки нет? Где же истина?

А вот где: в данном случае неверное решение привело к верному ответу. Не такая уж и редкость в математике, между прочим.

Вот видите, как далеко может завести геодезическая кривая! Но мы легких путей и не ищем.

P.S. Возможен и другой путь муравья: сначала по одному основанию, затем по боковой поверхности, и лишь потом по другому основанию. Но довольно легко убедиться, что он не может быть геодезической линией – всегда найдется что-то короче.

ПОЛОСАТОЕ ЧУДО

Сразу разьясим, почему полосатое – потому что основной рассматриваемых конструкций являются так называемые *полосы*. Итак, *полосой ширины a* называется пара параллельных прямых на расстоянии a между ними. Как видим, ничего особенного.

Чудо, о котором пойдет речь, появилось на свет, по историческим меркам, совсем недавно – в начале девяностых годов прошлого века, когда московский математик Вячеслав Викторович Произолов предложил для конкурса «Математика 6-8», проводимого журналом «Квант», следующую задачу:

Задача 1. *На полосе ширины 1 наложен квадрат $ABCD$ со стороной 1 так, что одна из прямых линий полосы пересекает его стороны AB и BC в точках M и N соответственно, а вторая пересекает стороны AD и CD в точках P и Q соответственно.*

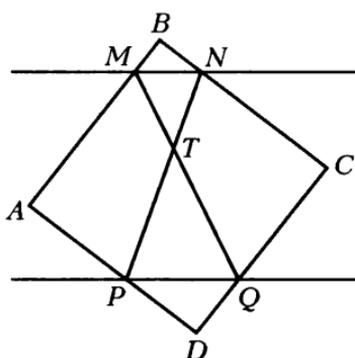


Рис. 1

Отрезки MQ и NP пересекаются в точке T (рис.1). Докажите, что $\angle MTN = 45^\circ$.

Задача покорила буквально всех, кому попалась на глаза – сколько в ней изящества, лаконизма и какой-то особой «завершенности». Что называется, ни добавить, ни убавить! Не останавливаясь пока на доказательстве, скажем, что в течение длительного времени никто не решался «пошевелить» столь ажурную конструкцию в поисках каких-то новых ее свойств или обобщений. Поэтому не мудрено, что первым решился на такой шаг... сам Вячеслав Викторович, и появилась новая теорема, основанная на том же чертеже:

Задача 2. *Докажите, что точки B , T и D лежат на одной прямой.*

Прекрасное расширение! Решение обеих задач основано, в общем-то, на одном и том же очевидном факте (который докажет любой троечник): *при пересечении двух полос ширины a образуется ромб с высотой a* . И если теперь вспомнить известное свойство ромба: *диагонали ромба являются биссектрисами его углов*, то решение этих задач становится почти очевидным.

В самом деле, мысленно отбросим стороны AD и BC данного квадрата, а остальные две стороны продлим до бесконечности в обе стороны. Что получится? Конечно, *вторая* полоса ширины

a , которая, пересекаясь с исходной полосой, даст в пересечении ромб, и MQ – его диагональ. Следовательно, MQ – биссектриса $\angle AMN$, и каждая ее точка лежит на одинаковом расстоянии от прямых AM и MN . Аналогично NP – биссектриса $\angle CNM$, и каждая ее точка лежит на одинаковом расстоянии от прямых CN и MN . Поэтому точка T пересечения биссектрис находится на одинаковом расстоянии от *всех трех* прямых: AM , CN и MN . Значит, точка T лежит на одинаковом расстоянии от прямых AB и BC , а следовательно – лежит на биссектрисе $\angle ABC$. Осталось сообразить, что биссектриса $\angle ABC$ есть диагональ квадрата $ABCD$, откуда и следует справедливость теоремы из задачи 2.

Что касается задачи 1, то здесь ситуация ничуть не сложнее. Пусть $\angle BMN = \alpha$, и $\angle BNM = \beta$. Ясно, что $\alpha + \beta = 90^\circ$ (так как это острые углы одного прямоугольного треугольника). Тогда дополнительные к ним углы равны: $\angle AMN = 180^\circ - \alpha$, $\angle CNM = 180^\circ - \beta$. Поскольку MQ и NP – биссектрисы, то они делят соответствующие углы пополам, так что $\angle TMN = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ и $\angle TNM = \frac{180^\circ - \beta}{2}$. А теперь учтем, что сумма углов треугольника MNT (как, впрочем, и любого другого треугольника) равна 180° , и потому:

$$\begin{aligned} \angle MTN &= 180^\circ - \angle TMN - \angle TNM = \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} - \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Как видим, пара бриллиантов В.В.Произволова оказалась, по сути, разными гранями одного и того же алмаза. Между прочим, отсюда следует симпатичная вариация, указанная на рис.2: если два одинаковых квадрата расположить так, чтобы каждая сторона любого из них пересекалась с двумя смежными сторонами другого квадрата, то отрезки, соединяющие противоположные точки пересечения сторон, перпендикулярны!

А сейчас давайте «пощупаем» чертеж на рис.1 чуть настойчивей. Итак, главная идея предыдущих задач заключалась в том, что квадрат $ABCD$ есть пересечение двух полос – всё остальное вытекало из этого. Но квадрат – это пересечение полос *под пря-*

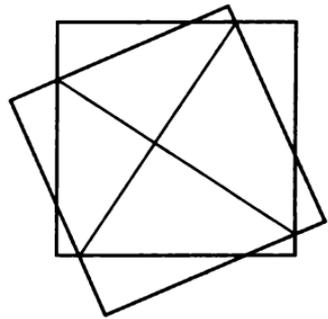


Рис. 2

мым углом. А если отказаться от прямого угла? Т.е. пусть $ABCD$ – ромб с высотой 1. Тогда он тоже является пересечением двух полос ширины 1, и многие из приведенных выше рассуждений наверняка окажутся применимы и в этом более общем случае!

Так оно и есть. Во всяком случае, утверждение задачи 2 при замене квадрата ромбом остается в силе. А утверждение задачи 1 придется слегка подкорректировать – угол 45° уже не получится. Легко видеть, что $\angle MTN$ в таком случае будет равен $\frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$. Естественно, что красота задачи 1 существенно

снизилась. Можно, правда, малость ее приподнять, если использовать другой угол ромба, и записать так: $\angle MTN = \frac{\angle BAD}{2}$.

(Кстати сказать, впоследствии Вячеслав Викторович признался, что он видел эти обобщения, но именно из эстетических соображений отказался заменить квадрат ромбом. Элегантность так элегантность!).

Можно пойти дальше и сделать следующие умозаключения: так как ромб есть пересечение двух полос, то фактически после замены квадрата ромбом мы получаем пересечение *трех* полос одинаковой ширины! При этом мы можем различными способами выбирать, какую полосу считать «основной», а какие две – составными частями ромба. Именно анализ «равноправия» полос позволил сделать обобщение задач В.В.Произволова, которое выглядит вполне достойно – под стать задачам 1 и 2 (и к тому же внешне мало на них похоже, хотя и имеет общие корни):

Задача 3. Три полосы одинаковой ширины расположены так, что в их пересечении образовался звездчатый шестиугольник $ABCDEFGHIJKL$ (рис.3). Докажите, что:

а) отрезки AG , CI и EK пересекаются в одной точке;

б) отрезки AG , BH и FL пересекаются в одной точке;

в) отрезки CI , BH и DJ пересекаются в одной точке;

г) отрезки EK , DJ и FL пересекаются в одной точке.

Доказательство этих теорем мы оставим читателям. Оно не очень сложно; главное здесь – выделить нужные ромбы и учесть, что их диагонали являются биссектрисами.

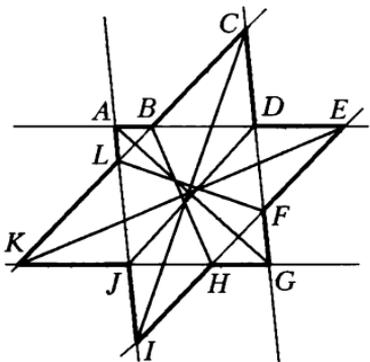


Рис. 3

НА ЧТО ПОХОЖА ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ?

Простой вопрос: какую форму принимает тяжелая однородная нерастяжимая нить (цепь, трос, веревка) под влиянием собственного веса, если ее концы закрепить?

Математик легко ответит на данный вопрос: она так и называется – *цепная линия*. С цепной линией люди встречаются на каждом шагу (провода, бельевые веревки и т.п.), тогда как в средней школе она не изучается (и далеко не в каждом вузе!). Результат показателен: большинство людей не имеют понятия о том, что она из себя представляет. Чтобы в этом убедиться, группой энтузиастов был проведен социологический опрос, т.е. неоднократные попытки выяснить у случайных прохожих, что это за кривая. Ответы распределились примерно следующим образом:

- Парабола – 1%
- Не знаю – 9%
- Караул! Милиция! Грабят! – 90%

И дело даже не в том, что в 99% случаев не получено содержательного ответа (по-видимому, опрос в основном производился в темное время суток в глухих переулках). Обратим внимание на тот самый процент, согласно которому цепная линия – это парабола. Более того, некоторые пытались аргументировать свои слова следующим образом: «Потому что парабола – кривая тяготения!». Если не вдумываться, аргумент представляется серьезным... Но представим себе гипотетическую ситуацию: очередной опрошенный заявляет, что цепная линия имеет форму *эллипса*. Как следует реагировать на столь странное утверждение? На всякий случай отойти подальше? Или сначала разобраться?

Отойти всегда успеем – будем разбираться! И не станем сразу отфутболивать идею насчет эллипса, основываясь только на том, что эллипс – замкнутая кривая, а цепная линия (и парабола, кстати, тоже) разомкнута. Безусловно, речь идет не об эллипсе целиком, а о *дуге* эллипса. Короче говоря: есть гипотеза, что дуга эллипса больше похожа на цепную линию, нежели дуга параболы. Как проверить ее справедливость?

Начнем с цепной линии. Если ввести систему координат с горизонтальной осью абсцисс и подобрать подходящие масштабы по осям, то уравнением цепной линии будет *гиперболический*

косинус: $y = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Правда, вершина этой кривой не

проходит через начало координат, поэтому удобнее использо-

вать несколько иную функцию: $y = \operatorname{ch}(x) - 1$. Ее можно записать в виде *ряда Тейлора*:

$$\operatorname{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \dots \quad (*)$$

Если при малых значениях x ограничиться первым слагаемым, то мы получим параболу $y = \frac{x^2}{2}$. Погрешность остатка имеет порядок x^4 .

Перейдем к эллипсу. Если взять эллипс $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$, выделить его нижнюю часть и перенести ее вверх на 3 – к началу координат, то получится такое разложение в ряд Тейлора:

$$y = 3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{219} + \dots$$

(Здесь мы воспользовались следующим разложением в ряд Тейлора бинома:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \dots,$$

справедливым при $|z| < 1$. В нашем случае

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} = (1+z)^\alpha, \text{ где } z = \left(-\frac{x^2}{3} \right), \alpha = \frac{1}{2}.$$

Сравнив это выражение с (*), обнаруживаем, что при малых значениях x точность приближения цепной линии эллипсом на два порядка лучше: x^6 . Вот так! Следовательно, к заявившему о том, что цепная линия – это дуга эллипса, надо относиться с огромным уважением к его удивительной интуиции, а не гнать взащей.

И последнее. Так как вышеупомянутый косинус – *гиперболический*, то может возникнуть подозрение (на сугубо этимологической основе), что можно подобрать гиперболу, которая (при малых x) будет приближать цепную линию еще лучше, чем эллипс. Но на деле это не так. *Любая* гипербола является еще худшим приближением, чем вышеупомянутая парабола $y = \frac{x^2}{2}$. Почему? Сами сообразите!

ЧИСЛА, ОДНИ ТОЛЬКО ЧИСЛА И НИЧЕГО, КРОМЕ ЧИСЕЛ

СТЕРЕОБЛЕСК

Вспомним два замечательных объекта, о которых много написано и, наверное, не меньше будет написано:

1) Числа Фибоначчи. Это последовательность чисел, первые два из которых равны 1, а каждое последующее равно сумме двух предыдущих: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Эта последовательность открыта в XIII веке Леонардом Пизанским (Фибоначчи) и обладает множеством удивительных свойств.

2) Магические квадраты. Так называют квадратные таблицы размером $n \times n$ клеток, в которых расставлены натуральные числа от 1 до n^2 включительно так, что суммы чисел по всем вертикалям, горизонталям и обеим диагоналям одинаковы. Для каких n такие квадраты существуют? Разумеется, для $n = 1$, но это, так сказать, примитивный квадрат – одно-единственное число, которое и равно самому себе. Для $n = 2$ магический квадрат невозможен, причем не только при заполнении его числами от 1 до 4, но и при попытке использовать *любые* 4 различных числа. Доказать это проще простого (надеемся, читатель сделает это сам). А вот для всех $n \geq 3$ магические квадраты существуют, причем при $n = 3$ такой квадрат единственен (с точностью до поворотов и отражений) (см. рис.1), а с ростом n количество принципиально различных магических квадратов резко возрастает.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Рис. 1

Возникает естественное побуждение: нельзя поместить в одну оправу эти два бриллианта (и добиться тем самым *двойного* сияния – от каждого из них)? Попробуем – тем более, что вполне очевидно, как это должно выглядеть. Итак, зададим вопрос: для каких n существует магический квадрат $n \times n$, в клетках которого расставлены попарно различные числа Фибоначчи? (*Различные* – это существенно, иначе задача стала бы чрезмерно простой). Ясно, что для простейших квадратов – 1×1 и 2×2 – ничего интересного нас не ждет: ответ здесь таков же, как и для «обычных» магических квадратов. А вот случай $n = 3$ уже не столь тривиален. Ответ здесь отрицатель-

ный, но сколько пришлось повозиться, чтобы это доказать! Вот как это было сделано.

Рассуждаем «от противного» – т.е. предположим, что составить магический квадрат 3×3 из чисел Фибоначчи все-таки можно.

Назовем *рядом* любую горизонталь, вертикаль или большую диагональ квадрата, и предположим, что нам удалось расставить требуемым в условии способом 9 различных чисел Фибоначчи, и сумма чисел в каждом ряду при этом равна S . Обозначим числа в порядке возрастания: $\Phi_1 < \Phi_2 < \dots < \Phi_9$. Заметим, что каждое из этих чисел *не меньше* суммы любых двух меньших его чисел (причем равенство возможно только в том случае, если эти три числа – *последовательные* числа ряда Фибоначчи).

Убедимся, что числа Φ_9 и Φ_6 не могут находиться в одном ряду, потому что тогда сумма чисел этого ряда будет больше суммы чисел некоторого другого ряда. Итак, пусть числа Φ_9 и Φ_6 все-таки попали в один ряд. Так как третье число такого ряда не меньше 1, то

$$S \geq \Phi_9 + \Phi_6 + 1 \geq (\Phi_8 + \Phi_7) + \Phi_6 + 1 > \Phi_8 + \Phi_7 + \Phi_6.$$

Поэтому если взять любой ряд, не содержащий числа Φ_9 , то даже при наличии в нем трех самых больших из оставшихся чисел (Φ_8 , Φ_7 и Φ_6) их сумма будет меньше S , что недопустимо.

Очевидно, тем более в одном ряду с числом Φ_9 не могут находиться числа Φ_7 или Φ_8 – для них сумма ряда окажется еще больше.

Таким образом, в одном ряду с числом Φ_9 не может быть ни одного из трех чисел Φ_8 , Φ_7 или Φ_6 . Но в какой клетке тогда может находиться число Φ_9 ? Если оно расположено в центральной клетке, то *любая* другая клетка лежит в одном каком-либо ряду с ней. Если число Φ_9 находится в угловой клетке, то легко видеть, что клеток, не лежащих в одном ряду с ней, имеется только две. Поэтому имеется единственная возможность: число Φ_9 расположено в клетке у середины какой-то стороны. Для определенности развернем квадрат так, чтобы число Φ_9 оказалось в самой верхней строке и отметим крестиками те четыре клетки, которые не лежат с числом Φ_9 в одном ряду (и, стало быть, только в этих клетках могут оказаться числа Φ_8 , Φ_7 и Φ_6) (см.рис.2).

Рассмотрим клетку с числом Φ_8 (это – одна из клеток с крестиком, неважно, какая

	Φ_9	
×		×
×		×

Рис. 2

именно). Ясно, что в одной строке и в одном столбце с ней находится еще по одной клетке с крестиками, и лишь одна (четвертая) клетка с крестиком не лежит с ней в одном ряду. Поэтому (принцип Дирихле!) хотя бы одно из чисел Φ_7 или Φ_6 находится с Φ_8 в одном ряду (горизонтальном или вертикальном). Убедимся, что даже если в одном ряду с Φ_8 находится число Φ_6 , то сумма чисел этого ряда больше, чем сумма чисел параллельного ему ряда, содержащего остальные две клетки с крестиками. В самом деле, если в одном ряду лежат числа Φ_8 и Φ_7 , то (аналогично вышеизложенному)

$$S \geq \Phi_8 + \Phi_6 + 1 \geq (\Phi_7 + \Phi_6) + \Phi_6 + 1 > \Phi_7 + \Phi_5 + \Phi_4.$$

В параллельном же ряду с остальными двумя крестиками не может находиться ни одно из чисел Φ_9 , Φ_8 или Φ_6 (они уже «заняты»), поэтому сумма чисел в нем не превосходит $\Phi_7 + \Phi_5 + \Phi_4$, что заведомо меньше S . Противоречие!

Тем более в одном ряду с Φ_8 не может находиться число Φ_7 – для него сумма окажется еще больше.

Ну, вот и все – приехали! Полученные противоречия показывают, что предположение о возможности составить магический квадрат 3×3 из различных чисел Фибоначчи было неверным, и на самом деле этого сделать нельзя.

Автор изложенного доказательства был необычайно горд своей изворотливостью, но скоро сообразил, что для квадратов больших размеров перебор неимоверно вырастет, и потому данный подход вряд ли будет к ним применим. Тем более что было неясно, к чему стремиться: к поиску таких квадратов или к доказательству отсутствия их существования. Компьютерный перебор ничего не дал, зато позволил выяснить интересную подробность: всякий раз *наибольшее* из использованных чисел Фибоначчи (которыми программа пыталась заполнить клетки квадрата) оказывалось *больше* суммы чисел в любой другой строке или столбце (собственно, потому и не удавалось его заполнить надлежащим образом). Возникла мысль: а вдруг *так и должно быть* (и, следовательно, надежд на заполнение нет)?

Мысль оказалась верной – настолько верной, что позволила решить даже чуть более общую задачу, для *прямоугольной* таблицы:

Доказать, что ни для каких m и n ($m \geq n \geq 2$) нельзя заполнить клетки прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, попарно различными числами Фибоначчи так, чтобы суммы чисел по всем строкам были равны и суммы чисел по всем столбцам были равны.

Если $m = 2$, то в силу неравенства $m \geq n \geq 2$, будет и $n = 2$, и мы имеем таблицу размером 2×2 . Ее заполнить нельзя – об этом мы уже говорили.

Пусть теперь $m \geq 3$. Допустим обратное – что удалось построить необходимый магический прямоугольник, и сумма всех чисел в нем равна S . Тогда сумма чисел в каждой строке равна S/m . Идея «приведения к абсурду» – в следующем: убедиться, что наибольшее число в таблице больше S/m (и тогда в той строке, где оно расположено, сумма окажется заведомо больше S/m – вот и противоречие!).

Обозначим последовательные числа Фибоначчи через Φ_1, Φ_2, Φ_3 и т.д., т.е. $\Phi_1 = 1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = 2, \dots$. Пусть наибольшее из чисел таблицы – это k -е число Фибоначчи Φ_k . Тогда S – это сумма нескольких различных чисел Фибоначчи, каждое из которых не превышает Φ_k . Ясно, что она не превышает суммы *всех* чисел Фибоначчи, не превышающих Φ_k . Таким образом, $S \leq \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_k$, и потому:

$$S/m \leq (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_k)/m \leq (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_k)/3$$

(последнее неравенство справедливо, поскольку $m \geq 3$).

Таким образом, осталось доказать неравенство:

$$(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_k)/3 < \Phi_k,$$

откуда и будет следовать, что наибольшее число таблицы больше суммы чисел в каждой строке.

Это неравенство, очевидно, равносильно такому:

$$2\Phi_k > \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{k-1}.$$

Докажем его по индукции. Для наименьших k оно справедливо ($2 \times 2 > 1 + 1, 2 \times 3 > 1 + 1 + 2$ и т.д.). Пусть оно справедливо для некоторого $k = K$, т.е.:

$$2\Phi_K > \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{K-1}$$

Докажем его справедливость и для $k = K + 1$:

$$\begin{aligned} 2\Phi_{K+1} &= 2(\Phi_K + \Phi_{K-1}) = 2\Phi_K + 2\Phi_{K-1} > \\ &> (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_{K-1}) + 2\Phi_{K-1} > \\ &> (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{K-1}) + \Phi_{K-1} + \Phi_{K-2} = \\ &= (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_{K-1}) + \Phi_K = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots + \Phi_K. \end{aligned}$$

Доказательство по индукции закончено, откуда и следует справедливость всего вышеизложенного.

Проблема, таким образом, исчерпана, результат – отрицательный.

Жаль, конечно, что «стереоблеск» двух бриллиантов оказался гораздо тусклее, чем каждого по отдельности, но выяснение истины даже в таком частном вопросе чего-то да стоит!

БУРСАЦКОЕ РАЗВЛЕЧЕНИЕ

Откроем первоисточник...

...которым является книга Н.Г.Помяловского «Очерки бурсы» (бурсой когда-то называлось специализированное учебное заведение с православным уклоном, но о религии речь здесь не пойдет). Обсудим одну несложную с виду задачу, возникшую при чтении книги.

В первом из очерков, озаглавленном «Зимний вечер в бурсе», один из бурсаков по кличке Цапля во время скучного урока совершает следующие действия (цитируем): «Цапля со всеусердием пишет что-то; со стороны посмотреть, он прилежнейший ученик, а между тем он вот что делает: напишет цифру, под ней другую, потом умножит их, под произведением опять подпишет первую цифру, опять умножит числа и так далее работает, желая знать, что из этого выйдет».

Вот давайте и зададим себе простой вопрос: «Так что же из этого выйдет?». Попытка ответить на него моментально упирается в подводный камень: не вполне понятно, *что именно* делает бурсак, как трактовать его действия. Пришлось подойти к проблеме статистически: дать своим знакомым прочесть упомянутую цитату, а затем спросить, что же, по их мнению, делает Цапля. Каждый опрошенный заявлял, что ему все совершенно понятно, после чего давал разъяснение, разительно отличавшееся от остальных. Тем не менее, после ряда уточнений автору удалось свести все трактовки к трем основным, которые и предлагаются вашему вниманию.

Трактовка первая, самая неинтересная

Кстати, большинство опрошенных выбрали именно ее. Они полагали, что любознательный бурсак каждый раз умножал результат на один и тот же самый первый сомножитель. Математически это формулируется так. Последовательность чисел x_n строится по такому правилу: x_0 и x_1 задаются заранее, а для всех $n \geq 2$ справедливо равенство: $x_n = x_{n-1}x_0$.

С такой трактовкой нет проблем. Сразу становится понятно, что мы имеем дело с обыкновенной геометрической прогрессией, первый член которой равен x_1 , а знаменатель x_0 . Последовательности такого типа настолько хорошо изучены, что здесь просто нечего добавить: каждый легко определит не только величину произвольного члена по заданному номеру n , но и без труда подсчитает, например, сумму первых n членов, а то и всей последовательности, если, скажем, $x_0 < 1$. Правда, резонно возражение: бурсак наверняка имел дело лишь с целыми числами. Так-то оно так, но кто нам мешает исследовать задачу и для других чисел? Избыток – не убыток, тем более в отношении знаний. Поэтому в дальнейшем полагаем, что первоначально выбранные бурсаком цифры – на самом деле не цифры, а произвольные положительные числа, не обязательно целые, и даже не обязательно рациональные.

Возможен ехидный вопрос: почему только положительные? А потому, что ноль нам ничего не даст – будут образовываться одни нули, а наличие отрицательных чисел приведет при перемножениях лишь к мельканию знаков «плюс» и «минус», ничего не меняя в абсолютных значениях чисел.

Трактовка вторая, более интересная

Выбравших эту трактовку было значительно меньше. Они полагали, что бурсак умножал только что полученное произведение *на предыдущее*: $x_2 = x_1x_0$, $x_3 = x_2x_1$, $x_4 = x_3x_2$ и так далее. Да, это несколько заковыристей, и сразу не скажешь, к чему может привести. Ну-ка, выразим несколько первых членов последовательности через x_0 и x_1 :

$$x_2 = x_1x_0,$$

$$x_3 = x_2x_1 = (x_1x_0)x_1 = x_1^2x_0,$$

$$x_4 = x_3x_2 = (x_1^2x_0)(x_1x_0) = x_1^3x_0^2,$$

$$x_5 = x_4x_3 = (x_1^3x_0^2)(x_1^2x_0) = x_1^5x_0^3$$

Пожалуй, хватит. Поскольку при перемножении степеней их показатели складываются, здесь просто *обязаны* возникнуть знаменитые числа Фибоначчи! Так оно и есть. Присмотревшись к членам последовательности x_n , мы легко обнаружим, что $x_n = x_1^{u_n}x_0^{u_{n-2}}$ где u_n – последовательность Фибоначчи, задаваемая условиями: $u_0 = u_1 = 1$ и $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n \geq 2$. Числа Фибоначчи сами по себе очень интересны, и об этой последовательности написано столько, что по обширности специальной

литературы с ней может соперничать разве что Великая теорема Ферма! Исследование поведения последовательности x_n – задача не очень-то простая, но вполне посильная даже ученикам 6-8 классов. Попробуйте, например, выяснить, к какому пределу стремится значение x_n , когда $n \rightarrow \infty$. Если не получится – что поделаешь, загляните в ответ.

Трактовка третья и, пожалуй, самая интересная

Эту трактовку предложил всего один человек – к сожалению, не автор настоящей статьи. Суть ее такова. Каждый раз под произведением бурсак записывает первую цифру этого произведения и производит очередное перемножение. Например: $9 \cdot 8 = 72$, $72 \cdot 7 = 504$, $504 \cdot 5 = 2520$ и так далее.

Заметим, что в этом случае каждое последующее число (начиная с третьего) целиком и полностью определяется единственным – предыдущим – числом, а не двумя числами, как в самом начале. Это позволяет нам отказаться от двух исходных чисел, и принять за исходное лишь одно число, полученное их перемножением. Все же дальнейшее «произрастает» из него.

Итак, x_0 считаем известным, а x_n для всех $n \geq 1$ равно произведению первой цифры числа x_{n-1} на само x_{n-1} .

Здесь сразу требуется уточнение: а если исходное число меньше 1, то что является его первой цифрой? Ноль? Нет, это, во-первых, не представляет собой никакого интереса (последовательность сразу же «занулится»), а во-вторых – будет не вполне логично. Более естественно считать первой цифрой числа его первую *значащую* цифру (например, для числа 0,00248 его первой цифрой будет 2).

Начнем рассуждать. Последовательность x_n , очевидно, убывающая. Возможны два варианта ее поведения:

1. В ней встретится число, начинающееся с единицы, и тогда все последующие члены будут ему равны (последовательность «застынет»). Те значения x_0 , для которых это происходит, назовем *устойчивыми*.

2. В ней никогда не встретится число, начинающееся с единицы, вследствие чего она будет неограниченно возрастать. Соответствующие x_0 назовем *неустойчивыми*.

Ну-ка, проверьте свою интуицию и скажите сразу, «с ходу»: а существуют ли вообще неустойчивые числа? Наверное, вряд ли: первые цифры получающихся чисел возникают как-то «хаотично», поэтому по чистой случайности в нашей странном образом организованной последовательности *непрерывно* должно встретиться число, начинающееся с единицы (чем она, спра-

шивается, хуже других цифр?). В крайнем случае допустимо существование нескольких «искусственно подобранных» неустойчивых чисел, но не более того!

Что ж, пока не станем возражать против такого категорического утверждения, но заметим, что иногда первое впечатление бывает обманчивым.

Рассуждаем дальше. Умножение или деление исходного числа на 10 не влияет на его устойчивость. Действительно, перенос десятичной точки вправо или влево не меняет значащих цифр, изменяется лишь масштаб (наподобие перевода, скажем, метров в километры). Это позволяет ограничиться изучением не всех положительных чисел, а лишь входящих в интервал $x_0 \in [1; 10)$.

Изучение неустойчивых чисел

Итак, существует ли хотя бы одно неустойчивое число? Для начала проверим целые x_0 (с ними легче): 1, 2,, 9. Довольно быстро выясняется, что число 5 – неустойчивое. Действительно, $x_1 = 5 \times 5 = 25$, $x_2 = 2 \times 25 = 50$, т.е. $x_2 = 10x_0$. Очевидно, $x_4 = 10x_2 = 100x_0$, $x_6 = 1000x_0$ и так далее.

Немного поразмыслив, приходим к выводу, что вообще все числа из интервала $[5; 6)$ – неустойчивые. Действительно, у таких чисел первая цифра 5 и поэтому $x_1 = 5x_0$, а значит, $25 < x_1 < 30$, т.е. первая цифра числа x_1 равна 2. Поэтому $x_2 = 2x_1 = 10x_0$. Дальнейшее ясно.

Из только что приведенных рассуждений можно сделать еще один вывод: все числа из интервала $\left[2\frac{1}{2}; 3\right)$ тоже неустойчивы (для этого надо лишь разделить пределы неустойчивости $[25; 30)$ числа x_1 на 10).

Итак, определены уже два интервала неустойчивости: $[5; 6)$ и $\left[2\frac{1}{2}; 3\right)$. Ну, а теперь нам предстоит довольно-таки нудная, но необходимая работа: проверка всех остальных чисел из интервала $[1; 10)$.

$1 \leq x_0 < 2$. Эти числа начинаются с единицы и потому устойчивые.

$2 \leq x_0 < 3$. Половина этого интервала уже исследована (числа $2\frac{1}{2} \leq x_0 < 3$). Пусть $2 \leq x_0 < 2\frac{1}{2}$. Тогда $x_1 = 2x_0$, и $4 \leq x_1 < 5$; поэтому $x_2 = 4x_1$, и $16 \leq x_2 < 20$. Первая цифра

числа x_2 – единица, значит, числа $x_0 \in \left[2; 2\frac{1}{2}\right)$ – устойчивые.

Отсюда же делаем вывод, что числа $x_0 \in [4; 5)$ – тоже устойчивые (ибо такими получились значения для x_1).

$3 \leq x_0 < 4$. Тогда $x_1 = 3x_0$ и $9 \leq x_1 < 12$. Если $x_1 \geq 10$, то x_1 начинается с 1, и x_0 – устойчивое. Это достигается, если $x_0 \geq 3\frac{1}{3}$. Итак, все $x_0 \in \left[3\frac{1}{3}; 4\right)$ – устойчивые.

Пусть $x_0 \in \left[3; 3\frac{1}{3}\right)$. Тогда $x_1 = 3x_0$ и $9 \leq x_1 < 10$. Следовательно, $x_2 = 27x_0$ и $81 \leq x_2 < 90$. Значит, $x_3 = 8x_2 = 27x_0$ и $648 \leq x_3 < 720$. В зависимости от значения $3x_0$ число x_3 может начинаться с 6 или 7, причем «граничное» значение x_0 определяется из условия $x_3 = 216x_0 = 700$, т.е. $x_0 = 3\frac{13}{54}$. Итак, необходимо рассмотреть два случая.

1) $x_0 \in \left[3; 3\frac{13}{54}\right)$. Тогда $x_3 = 216x_0$ и $648 \leq x_3 < 700$. Следовательно, $x_4 = 6x_3 = 1296x_0$ и $3888 \leq x_4 < 4200$. Это позволяет сделать вывод об устойчивости, так как уже известно, что числа из интервалов $\left[3\frac{1}{3}; 4\right)$ и $[4; 5)$ – устойчивы, а пределы значений x_4 , деленные на 1000, целиком лежат в интервале $\left[3\frac{1}{3}; 5\right)$.

2) $x_0 \in \left[3\frac{13}{54}; 3\frac{1}{3}\right)$. Тогда $x_3 = 216x_0$ и $700 \leq x_3 < 720$. Следовательно, $x_4 = 7x_3 = 1512x_0$ и $4900 \leq x_4 < 5040$. Деля на 1000 и учитывая ранее найденные интервалы устойчивости и неустойчивости, получаем: те x_0 , для которых $4900 \leq x_4 < 5000$ – устойчивы, а те x_0 , для которых $5000 \leq x_4 < 5020$ – неустойчивы. «Граничное» значение x_0 найдется из условия $x_4 = 1512x_0 = 5000$, откуда $x_0 = 3\frac{58}{189}$.

Итак, после долгих мук получен третий интервал неустойчивости: $\left[3\frac{58}{189}; 3\frac{1}{3}\right)$.

Утерши пот со лба, пойдем дальше, учитывая, что интервалы $[4; 5)$ и $[5; 6)$ уже рассмотрены.

$6 \leq x_0 < 7$. Тогда $x_1 = 6x_0$ и $36 \leq x_1 < 42$. Но мы уже знаем,

что интервал $[3,6;4,2)$ – устойчив, поэтому интервал $[6;7)$ – тоже устойчив.

$7 \leq x_0 < 8$. Тогда $x_1 = 7x_0$ и $49 \leq x_1 < 56$. Здесь «граничным» является такое значение x_0 , что $x_1 = 7x_0 = 50$, т.е. $x_0 = 7\frac{1}{7}$.

Итак, появился четвертый интервал неустойчивости: $\left[7\frac{1}{7};8\right)$.

$8 \leq x_0 < 9$. Тогда $x_1 = 8x_0$ и $64 \leq x_1 < 72$. Здесь «граничное» значение определяется из условия $x_1 = 8x_0 = 7\frac{1}{7} \times 10$, т.е.

$x_0 = 8\frac{13}{14}$. Возник пятый интервал неустойчивости: $\left[8\frac{13}{14};9\right)$.

$9 \leq x_0 < 10$. Тогда $x_1 = 9x_0$, и $81 \leq x_1 < 90$. Деля на 10, находим «граничное» значение: $x_1 = 9x_0 = 8\frac{13}{14} \times 10$, т.е.

$x_0 = 9\frac{58}{63}$. Итак, последний интервал неустойчивости: $\left[9\frac{58}{63};10\right)$.

Таким образом, всего имеется шесть «разнокалиберных» интервалов неустойчивых чисел, которые для наглядности изобразим на числовой оси (рис. 1):



Рис. 1

Суммарная их протяженность равна примерно 2,53, т.е. около 28 % длины всего интервала $[1;10)$. Как видно, вероятность того, что наугад взятое число окажется неустойчивым, не так уж мала, хотя на первый взгляд казалось, что она должна быть близка к нулю.

Теперь «судьба» каждого исходного числа нам ясна, и мы можем сразу сказать, что последовательность, начинающаяся, к примеру, числом $x_0 = 71428571$ на некотором шаге «застынет»; если же x_0 увеличить на 1, то последовательность будет расти неограниченно. Подобные выводы можно делать и для иррациональных чисел. Например, число $\pi = 3,141\dots$ – устойчивое, а $e = 2,718\dots$ – неустойчивое.

Интересно было бы поискать неустойчивые числа и в других системах счисления. Только не в двоичной – ведь там неустойчи-

вых чисел вовсе нет. Этот факт становится очевиден сразу же, как только мы вспомним, что все положительные двоичные числа имеют первой значащей цифрой единицу. Насчет остальных систем счисления автору ничего не известно.

Решение задачи, поставленной во второй трактовке

Чтобы найти искомый предел, не мешало бы иметь выражение чисел Фибоначчи u_n в явном виде, т.е. как зависимость непосредственно от n , а не от предыдущих членов. Но как это сделать?

На сей счет существует специальный хитрый прием, с которым читателю не мешает ознакомиться – может пригодиться при работе с аналогичными последовательностями.

Сначала попробуем найти *геометрическую прогрессию*, обладающую свойством, аналогичным последовательности Фибоначчи: чтобы каждый ее член равнялся сумме двух предыдущих. Но при чем здесь геометрическая прогрессия? Этот вопрос мы отнесем к разряду провокационных и потому ответим на него также вопросом: «А почему бы и нет?» Итак, возьмем некоторую геометрическую прогрессию с исходным членом $a_0 = b$ (разумеется, $b \neq 0$) и знаменателем q . Тогда n -й член прогрессии равен $a_n = bq^n$, и наше требование о том, что каждый член равен сумме двух предыдущих, запишется так:

$$bq^n = bq^{n-1} + bq^{n-2}$$

Сократив правую и левую часть на bq^{n-2} , получаем квадратное уравнение:

$$q^2 = q + 1,$$

которое имеет два корня: $q_1 = (1 + \sqrt{5})/2$; $q_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Значение же b может быть любым, что и неудивительно, так как это – постоянный множитель, не могущий как-то нарушить равенство. Таким образом, обнаружено аж две геометрических прогрессии, у которых каждый член равен сумме двух предыдущих. Очевидно, что и алгебраическая сумма таких прогрессий также будет обладать указанным свойством, т.е. у последовательности $c_n = b_1q_1^n + b_2q_2^n$ при произвольных b_1 и b_2 каждый член также будет равен сумме двух предыдущих.

Теперь представим себе, что нам удалось как-то подобрать такие b_1 и b_2 , что первые два члена последовательности c_n оказались в точности равны двум первым членам последователь-

ности Фибоначчи: $c_0 = u_0 = 1$, $c_1 = u_1 = 1$. Но тогда в силу свойства последовательности c_n все остальные ее члены также будут членами последовательности Фибоначчи! А это будет означать, что зависимость u_n от n найдена.

Итак, дело за малым – определить b_1 и b_2 . Это тоже дело несложное – надо всего лишь решить систему уравнений:

$$\begin{cases} c_0 = 1, \\ c_1 = 1, \end{cases}$$

или, после подстановки значений:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + b_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Решая ее, находим: $b_1 = (1 + \sqrt{5})/2\sqrt{5}$; $b_2 = -(1 - \sqrt{5})/2\sqrt{5}$, и, подставив их затем в выражение для c_n , получаем, наконец:

$$c_n = u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

На тех, кто впервые сталкивается с данным выражением, оно производит обычно сильное впечатление. В самом деле – сугубо целочисленная последовательность Фибоначчи на проверку оказывается суммой двух геометрических прогрессий, притом напичканных радикалами! Да и не просто радикалами, а всемирно известными *золотыми сечениями*. Чудеса, да и только!

Но у нас сейчас другая задача – найти предел. Обратим внимание, что выражение во вторых круглых скобках по абсолютной величине меньше 1, поэтому с ростом n его $(n + 1)$ -я степень стремится к нулю. Иное дело – выражение в первых скобках, которое, наоборот, больше 1, поэтому фактически при больших n величина u_n определяется лишь им. Следовательно, для вычисления нашего предела можно уверенно полагать, что:

$$u_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Так что с возрастанием n все точнее и точнее выполняется равенство:

$$x_n = x_1^{u_{n-1}} x_0^{u_{n-2}} = \frac{(x_1^\tau \cdot x_0)^{\tau^{n-1}}}{\sqrt{5}}$$

(здесь мы для удобства восприятия обозначили $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ – наше золотое сечение). Теперь сразу становится ясно, что искомый предел Π зависит от числа $y = x_1^\tau \cdot x_0$, стоящего в

основании степени. Если оно меньше 1, то при возведении во все увеличивающуюся степень оно устремится к нулю, если больше – то будет неограниченно возрастать, наконец, если строго равно 1 – то так единицей и останется. Таким образом, если $y < 1$, то $\Pi = 0$; если $y = 1$, то $\Pi = 1$; если $y > 1$, то $\Pi = \infty$.

ХИТРОУМНЫЙ ИОСИФ ФЛАВИЙ

В I веке нашей эры жил иудейский историк Иосиф Флавий. Происходил он из почтенной семьи священнослужителей. Еще в возрасте до 30 лет Иосиф побывал в Риме. По возвращении в Иерусалим он обнаружил, что готовится восстание против римского правления, и присоединился к заговорщикам (возможно, особого энтузиазма Флавий при этом не испытывал, но пойти против всеобщего мнения не решился). Когда началось восстание, Иосифу была поручена оборона Галилеи (северной части Палестины), однако его действия были малоуспешными, и, выдержав полуторамесячную осаду в городе Нотопате, он попал в плен к римскому военачальнику и будущему императору Веспасиану. Даже в такой, мягко говоря, неприятной ситуации Иосиф не растерялся, предложил свои услуги Веспасиану и до конца войны был у него переводчиком, а также посредником в переговорах. После падения Иерусалима Иосиф отправился в Рим, где получил римское гражданство и пенсию. Иосиф известен дошедшими до нас на греческом языке трудами, основные из которых – «Иудейская война» (о том самом неудачном восстании) и «Иудейские древности» (где изложена история евреев от сотворения мира до Иудейской войны). Довольно глубоко и интересно жизнь Флавия освещается в романе Леона Фейхтвангера, который так и называется – «Иудейская война».

Математикой как таковой Флавий, по существующим сведениям, не занимался, но в математическую историю, тем не менее, попал – прежде всего как персонаж весьма интересной задачи, названной впоследствии его именем. Задача впервые была сформулирована в одной древней рукописи.

Итак, группа воинов-иудеев в количестве n человек спряталась от превосходящих сил римлян в пещере. Не желая попадать в плен, они стали в круг и решили, начав отсчет с одного из них и продвигаясь по часовой стрелке, убивать каждого p -го, пока не останется один, который должен покончить с собой (естественно, убитые сразу выбывают из круга и в дальнейших подсчетах не участвуют). Среди воинов был Иосиф Флавий, который как-то

не очень стремился на тот свет. Поэтому он рассчитал, какое место следует занять, чтобы потом, оставшись в одиночестве, без помех сдать противнику. Спрашивается: какое это место (при заданных n и p), а точнее – каков номер места, если войны пронумерованы по часовой стрелке числами от 1 до n , причем номер 1 присвоен воину, с которого начат отсчет. Удобно обозначить искомое значение в виде функции от двух переменных: $f(n, p)$.

Правду сказать, в исходном виде задачи указывались конкретные значения: $n = 41$ и $p = 3$,¹ но какой математик откажется от обобщений? Однако сразу признаем: несмотря на огромнейшую популярность задачи о Флавии и множество исследователей, до конца разобраться с ней так и не удалось.

Уже $p = 2$ – совсем не простой вариант, но, к счастью ответ на него известен. Для этого надо выделить наибольшую целую степень двойки, не превышающую n , т.е. представить n в виде: $n = 2^k + m$, где $0 \leq m < 2^k$ (знакомые с логарифмами могут записать: $k = \lceil \log_2 n \rceil$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа). Тогда $f(n, 2) = 2m + 1$.

Для доказательства сначала рассмотрим вариант, когда n – степень двойки. Здесь $m = 0$ и потому $f(n, 2) = 1$. Для доказательства можно использовать индукцию (по показателю степени двойки), но можно рассуждать еще проще. Итак, пусть $n = 2^k$ (k – натуральное). Сделаем 2^{k-1} ходов (ходом мы называем удаление очередного воина – говорить «убийство» как-то не хочется). В результате будут удалены воины, стоящие на четных местах (ровно половина от их количества), и при этом номер последнего удаленного воина будет равен $2 \times 2^{k-1} = 2^k$, т.е. это окажется воин, стоящий по кругу перед первым воином. Итак, количество воинов уменьшилось вдвое, а «точка старта» оказалась там же, где и была, и отсчет начинается с того же воина номер 1. Сделаем еще 2^{k-2} ходов и удалим половину оставшихся воинов – и опять вернемся туда же. Ясно, что, обойдя круг нужное число раз, мы останемся с единственным воином – номер 1 (при каждом обходе по кругу он остается нетронутым).

Ну, а если n – не степень двойки, т.е. $n = 2^k + m$, где $1 \leq m < 2^k$? Сначала сделаем m ходов, удалив последовательно воинов номер 2, 4, ..., $2m$. Так как $m < 2^k$, то $2m < 2^k + m = n$,

¹ Попробуйте сами найти $f(41, 3)$. Вообще-то для конкретных не слишком больших n и p значение $f(n, p)$ определяется без особого труда. А вот общее решение...

т.е. при этом мы «опишем» меньше, чем полный оборот. В результате после m -го хода останутся живыми ровно 2^k воинов (степень двойки!), а «стартовым» номером станет номер $2m + 1$. Получается рассмотренный выше вариант, только с переносом точки старта с 1 на $2m + 1$. Следовательно, живым после всех вычеркиваний останется воин номер $2m + 1$. Кстати, если n – степень двойки, т.е. $m = 0$, то и здесь ответ (равный 1) совпадает с выше определенным.

Если мы графически попытаемся изобразить зависимость $f(n, 2)$ от n , то получится характерная «пилообразная» ломаная линия, у которой каждый «зуб» начинается с точки $(2^k, 1)$, и «длина» каждого зуба вдвое больше длины предыдущего. В связи с этим можно сформулировать ответ чуть иначе, выбрав «опорные точки» – т.е., по сути, начальные точки зубьев. В соответствии с вышеизложенным, определяем последовательность чисел $n_i = 2^i$, где $i = 0, 1, 2, \dots$, которые и являются опорными точками. Далее, если $n = n_i$ для какого-либо i , то $f(n, 2) = 1$, а при $n_i < n < n_{i+1}$ будет $f(n, 2) = f(n_i, 2) + 2(n - n_i)$. Ясно, что такое описание эквивалентно предыдущему, и тогда зачем оно нужно? Оказывается, чтобы удобней было изложить ответ для других p .

Дело в том, что для $p > 2$ имеет место нечто подобное («пилообразность» тоже проявляется достаточно явно). Рассмотрим сначала случай $p = 3$. Для него опорными значениями являются такие n , для которых $f(n, 3)$ равно 1 или 2. Соответствующая последовательность чисел n_i будет такова: 1, 2, 3, 6, 9, 14, 21, 31, 47, 70, ..., причем с неплохой точностью справедлива формула $n_i = C \times (3/2)^i$, где $C = 1,216\dots$ – некоторая константа. А для промежуточных n имеет место аналогичная зависимость: если $n_i < n < n_{i+1}$, то $f(n, 3) = f(n_i, 3) + 3(n - n_i)$. Вроде бы, все хорошо, за исключением пустячка: нет «хорошей» (т.е. удобной для практического использования) зависимости, которая указывала бы, для каких n_i величина $f(n_i, 3)$ равна 1, а для каких 2. Посему указать местонахождение счастливого (т.е. последнего живого) можно только примерно – с погрешностью в пределах одного человека (что, наверное, вряд ли устроило бы Флавию – ставка слишком высока!).

Еще более расплывчато выглядит ответ для $p > 3$. Здесь «опорные» значения n_i , для которых $f(n, p)$ не превышает $p - 1$, образуют похожую последовательность $n_i = C \left(\frac{p}{p-1} \right)^i$,

где C – свое для каждого p , и $f(n, p) = f(n_i, p) + p(n - n_i)$. Вот, в основном, все, что известно о результатах решения задачи Иосифа Флавия на настоящий момент.

Жизнерадостный принцип «убитый выбывает» оказался настолько привлекателен, что именем Иосифа Флавия стали называть многие другие задачи, в которых он так или иначе используется. Например, широкою известность получило так называемое «решето Иосифа Флавия». Суть его в следующем. Возьмем натуральный ряд. Вычеркнем в нем каждое второе число (т.е., собственно, все четные числа). Из той последовательности, что осталась, вычеркнем каждое третье число, а из того, что осталось – каждое четвертое и так далее. Что за последовательность у нас получится?

Бросается в глаза некое родство описанных действий со знаменитым «решетом Эратосфена», позволяющим получить последовательность простых чисел. Только обратите внимание: Эратосфен *зачеркивает* числа (т.е. некоторые из них могут оказаться зачеркнуты несколько раз), а Флавий (вернее, тот, кто действует от его имени) их *вычеркивает*, т.е. «убитое» число и впрямь выбывает. Оказывается (доказательство не слишком сложно, но громоздко), просеившаяся через решето Иосифа Флавия последовательность: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, ... (носящая, как вы догадались, тоже имя Флавия) позволяет приближенно вычислять длину окружности. Точнее говоря, отношение ее i -го члена к i^2 близко к $\frac{\pi}{4}$, причем чем больше i , тем точнее это равенство (уже для 10-го члена оно равно 0,79, что соответствует $\pi \approx 3,16$, а, например, для 10000-го получается $\pi \approx 3,14151...$ – совсем неплохая точность!).

Что ж, с Иосифом Флавием мы познакомились. А не попробовать ли нам объединить решето Флавия и задачу о самоубийстве воинов-иудеев? Конечно, в одну повозку впрямь не можно... но мы постараемся.

В самом деле, почему эти воины решили использовать такую скучную схему удаления своих товарищей из круга (каждого p -го – и все тут!)? А если им, подобно решету Флавия, сперва убить 1-го, затем, продолжая отсчет по кругу – 2-го, потом 3-го и т.д. вплоть до $(n - 1)$ -го, пока не останется единственный боец? Где тогда окажется нужное Иосифу место (обозначим его $\varphi(n)$)? Возможен и «обратный» способ удаления: сначала убить $(n - 1)$ -го, потом $(n - 2)$ -го, $(n - 3)$ -го и так далее. Кто здесь останется в живых?

Обе вновь сформулированные задачи кажутся одинаково сложными, но... одна из них, оказывается, очень проста, а именно – «обратная». Причина в том, что после каждого хода количество оставшихся в живых воинов также уменьшается на 1. Но что это дает? А вот что. Итак, первоначально имеется n воинов. Легко видеть, что $(n - 1)$ -й воин *по часовой стрелке* – это 2-й воин *против часовой стрелки*! После первого хода осталось $n - 1$ воинов, и при новом отсчете $(n - 2)$ -й воин *по часовой стрелке* – это опять же 2-й воин *против часовой стрелки*! И так далее. Т.е. изменение правил отсчета по сравнению с исходной задачей для $p = 2$ просто-напросто *меняет направление отсчета*! Таким образом, стратегия Иосифа Флавия отличается лишь направлением. Итак, чтобы оказаться последним живым, ему надо представить n в виде $n = 2^k + m$, где $m < 2^k$, а затем занять $(2m + 1)$ -е место *против часовой стрелки*.

Ну, а «прямой» метод удаления воинов из круга дает столь хаотичные результаты, что не только не видно какой-либо закономерности, но даже и намек на нее! И уж тем более ни о какой «пилообразности» даже речи быть не может. Вот какой номер оставшегося в живых воина найден с помощью компьютера для первых значений n :

n	$\varphi(n)$								
1	1	11	11	21	7	31	27	41	22
2	2	12	8	22	22	32	26	42	25
3	2	13	13	23	2	33	7	43	14
4	2	14	4	24	8	34	33	44	22
5	4	15	11	25	13	35	20	45	37
6	5	16	12	26	26	36	16	46	18
7	4	17	8	27	4	37	22	47	46
8	8	18	12	28	26	38	29	48	42
9	8	19	2	29	29	39	4	49	46
10	7	20	13	30	17	40	13	50	9

Однозначно ясно только одно: при $n > 1$ первому воину надеяться не на что: его убивают первым же ходом. Потом (до конца первого круга) выбывают воины, номера которых – треугольные числа, а начиная со второго круга путаница катастрофически нарастает, что очень затрудняет анализ задачи. Посему на данный момент остается только поднять руки и временно признать поражение. Или читатель другого мнения?

КОРОЛЕВСКИЕ ПРОГУЛКИ

Эта драматическая история началась в 1973 году на Всесоюзной математической олимпиаде, где предлагалась следующая задача (автор – А.Ходулев):

Каждая клетка шахматной доски представляет собой квадрат со стороной 1. Шахматный король обошел все поля такой доски, побывав на каждом по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наибольшую длину может она иметь?

Автор этих строк был среди участников олимпиады и с данной задачей не справился. Точнее говоря, справился, но лишь частично. А именно: путем проб и ошибок сумел-таки нащупать наидлиннейший маршрут, но никакого доказательства тому, кроме слов «у меня больше не получилось», привести не сумел. Жюри по достоинству оценило такой аргумент и поставило за него оценку «±» (примерно соответствует двойке с плюсом).

Правильное же решение весьма изящно. Рассмотрим поля, примыкающие к внешней границе доски. Назовем *соседними* поля, имеющие общую сторону. Каждое граничное поле имеет двух граничных же соседей. Рассмотрим теперь два последовательных граничных поля, встретившихся на маршруте короля. Если эти поля не являются соседними, то соединяющий их фрагмент маршрута разделяет доску на две части, каждая из которых имеет поля – хотя бы граничные – не принадлежащие этому фрагменту. Тогда остальной маршрут должен проходить и в одной, и в другой части доски, но при этом он не может быть замкнутым! А это противоречит условию. Поэтому последовательные в маршруте граничные поля должны быть соседними, т.е. король должен обходить их *по порядку*. В этом соль решения. Так как граничных полей всего имеется 28, и соседние поля имеют разный цвет, а для перехода на другой цвет необходимо сделать хотя бы один вертикальный или горизонтальный ход, то с учетом замкнутости маршрута делаем вывод,

маршруту граничное поле должно быть соседним к одному из полей X или Y и так далее. Таким образом в процессе обхода образуется и постепенно накапливается «нерасторжимая группа» граничных полей, и каждое очередное на маршруте граничное поле «приклеивается» к одному из крайних полей этой группы.

Граничных полей всего 28, причем они чередуются – черные и белые. Как можно обойти их по указанным правилам, чтобы наименьшее число раз менять цвет поля (смена цвета, как мы знаем, влечет за собой нежелательный короткий ход длиной 1)? Пусть для определенности первое граничное поле на маршруте было черным. Оба его соседа – белые, и здесь явно придется менять цвет. Зато на следующем ходу можно перейти к противоположному соседу (с другой стороны), который тоже белого цвета. Далее опять ситуация вынужденная: оба соседа «нерасторжимой группы», состоящей из трех полей – черные, и придется при переходе к одному из них снова сделать короткий ход. Но зато потом можно перейти к другому черному соседу, не меняя цвета, и так далее. Ясно, что такой путь соответствует наименьшему числу коротких ходов. Схематично его можно изобразить так:

ЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧЧББЧ

Как видно, число перемен цвета (и, соответственно, коротких ходов) не может быть меньше 14. Но, с другой стороны, существует маршрут, содержащий ровно 14 коротких ходов (рис. 2).

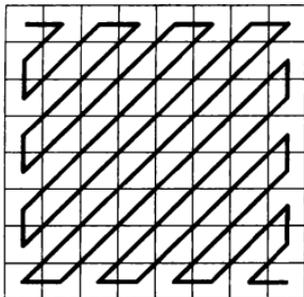


Рис. 2

Он, очевидно, и является максимально длинным, и его протяженность составляет $14 + 49\sqrt{2}$ (на всякий случай отметим, что незамкнутый маршрут содержит всего 63 хода, а не 64, как замкнутый).

Несколько позже было обнаружено гораздо более короткое решение, суть которого в следующем. Назовем *узлом* точку доски, в которой сходятся углы четырех клеток. Всего на доске, как нетрудно подсчитать, 49 узлов. Каждый длинный (диагональный) ход проходит через узел, а короткий – не проходит. Поскольку маршрут несамопересекающийся, то через каждый узел может пройти не больше одного длинного хода. Поэтому общее число длинных ходов не превышает числа узлов, т.е. длина маршрута не может стать больше $14 + 49\sqrt{2}$. Осталось

привести пример (тот же самый), на котором, как видно, путь короля проходит через все имеющиеся узлы. Красиво, не правда ли?

В таком виде задача была в конце XX века предложена уже нынешнему поколению школьников на математических соревнованиях. Как видите, одна олимпиадная задача породила другую – через 25 лет!

Таким образом, для несамопересекающегося маршрута (замкнутого или незамкнутого) все стало ясно. При переходе же к самопересекающимся маршрутам все наши рассуждения о граничных полях помочь не могут. Придется изобретать велосипед заново.

Сначала разберемся с незамкнутым самопересекающимся маршрутом (случай «Б»). Выделим из доски только черные поля, забыв пока о белых, и отметим их центры жирными точками (таких точек, очевидно, 32). Если от одного из таких полей можно диагональным ходом перейти к другому, соединим соответствующие точки отрезком. Наконец, повернем для удобства все изображенное на 45 градусов и получим то, что показано на рисунке 3.

Ясно, что проделав те же операции над белыми полями, мы получили бы такую же картинку.

Итак, каждый отрезок – это *теоретически возможный* диагональный ход. Нам, естественно, хочется, чтобы их было как можно больше. Но тому мешает естественное ограничение: каждое черное поле (которому соответствует жирная точка) король может посетить только один раз. Давайте разобьем всю нашу «сетку» из отрезков на 12 частей, 9 из которых имеют форму креста, и еще три (среди которых две зеркально симметричных) – другую форму (рис.4).

Заметим, что из четырех отрезков, составляющих каждый крест, король может пройти не более, чем по двум (иначе ему пришлось бы дважды посетить поле, соответствующее центру креста). По аналогичным причинам, для двух из остальных фигур (тех что по краям, симметричных между собой) число использованных отрезков не превышает 3, а для последней (центральной) фигуры – 4. Поэтому всего

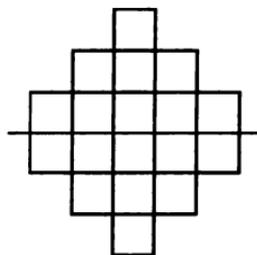


Рис. 3

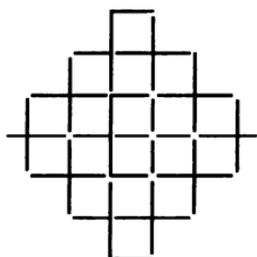


Рис. 4

король мог сделать по черным диагональным полям не более $2 \times 9 + 3 \times 2 + 4 = 28$ ходов.

Итак, черных диагональных ходов не может быть более 28, белых, разумеется, тоже, так что всего диагональных ходов не больше 56. Соответственно остальные ходы (а их не меньше 7) – горизонтальные или вертикальные. С другой стороны, можно построить маршрут как раз с 56 диагональными ходами (рис.5).

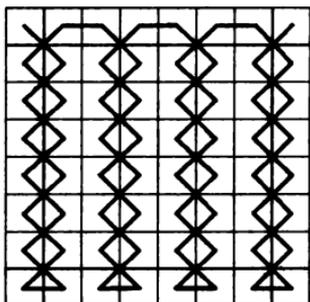


Рис. 5

Итак, найден ответ и для случая «Б»: $7 + 56\sqrt{2}$.

Осталось всего ничего – самопересекающийся замкнутый маршрут («Г»). Заметим, что наши рассуждения о «цепочках» применимы и здесь,

т.е. можно доказать, что длина маршрута не может превышать $8 + 56\sqrt{2}$ (здесь придется сделать не 7, а 8 коротких ходов). Как же найти такой маршрут? Проще всего этого можно было бы достичь, если бы у найденного ранее незамкнутого маршрута начало и конец лежали на соседних полях. Соединить их – и готово! Однако внимательное рассмотрение показывает, что сей факт не имеет места. Что ж, придется располагать и сопрягать цепочки по-другому. Вперед! И, казалось, цель достигнута: обнаружен вот такой замысловатый (и к тому же центрально-симметричный маршрут – рис.6).

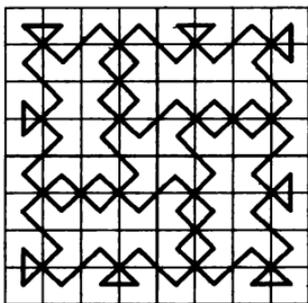


Рис. 6

Длина его (подсчитайте, если не верите), составляет ровно $8 + 56\sqrt{2}$. Ура?

Как бы не так! Хорошее настроение продержалось недолго, ибо выяснилось, что на самом деле это не один, а два замкнутых маршрута, между собой не соединяющихся. Правда, их легко «сцепить», заменив в одном месте пару пересекающихся диагональных ходов парой параллельных вертикальных, что порождает маршрут длиной $10 + 54\sqrt{2}$ – чуть короче (рис.7).

Нетрудно понять (хотя бы из соображений «цветности» посещаемых королем полей), что маршрут промежуточной длины (т.е. $9 + 55\sqrt{2}$) невозможен. Поэтому фактически осталось

лишь два возможных ответа на вопрос о длине длиннейшего маршрута: либо $8 + 56\sqrt{2}$ (но таковой не обнаружен), либо $10 + 54\sqrt{2}$ (таковой найден, но не доказано, что длиннее не бывает).

Общий итог безрадостен: решить задачу полностью и окончательно так и не удалось, и по сей день ответ неизвестен. Так что вся надежда – на читателей. Сделайте одолжение – выдерните этот больной зуб!

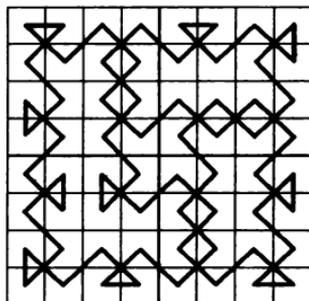


Рис. 7

Неожиданное развитие темы предложил А. Спивак. Давайте откажемся от необходимости обхода королем *всех* полей доски. Приведет ли это к увеличению максимально возможного числа диагональных ходов? Казалось бы, ответ однозначен: нет. В самом деле – чем меньше обойдено полей, тем меньше общее число ходов, что, очевидно, вызывает уменьшение и числа диагональных ходов (во всяком случае, *не увеличение!*). И действительно, в случае незамкнутого несамопересекающегося маршрута нами было доказано, что число диагональных ходов в любом случае не превосходит 49, причем в доказательстве нигде не использовалось требование о *непрерывном* обходе всех полей доски. Так что ответ здесь остается тем же: 49. Аналогично и для самопересекающихся маршрутов: мы убедились, что всего диагональных ходов не более 56, чего мы успешно достигли для незамкнутого маршрута и почти достигли для замкнутого.

Однако совсем иной результат получается, если применить идею Спивака к исходной задаче – для замкнутого несамопересекающегося пути короля. Здесь идея решения о последовательном обходе граничных полей становится совершенно неприемлемой (их вообще не обязательно все обходить), и потому наибольшее число диагональных ходов может значительно превзойти 36! На рисунке 8, например, показан маршрут с 44 диагональными ходами. Но доказательства максимальной этого значения (как и *уверенности* в такой максимальнойности) пока нет.

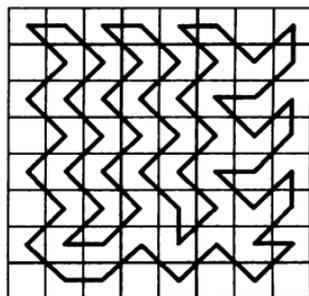


Рис. 8

ТРЕУГОЛЬНИКИ НА ШАХМАТНОЙ ДΟΣКЕ

Название статьи может вызвать недоумение. Каждому известно: шахматная доска – квадратная, и все поля на ней квадратные, так о каких треугольниках вообще можно толковать?

А между тем... почему бы и нет? Возьмем центры трех любых полей, соединим их – вот и треугольник. Именно о них и поговорим.

В 2003 году на одном математическом конкурсе была предложена следующая задача:

Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток?

Решение ее, в общем-то, несложное.

Рассмотрим сначала все горизонтали доски, в каждой из которых отмечено *не менее двух* клеток. Пусть таких горизонталей t (ясно, что $0 \leq t \leq 8$), и всего в них отмечено M клеток. Закрасим все эти M клеток в красный цвет. Заметим, что на одной *вертикали* с любой красной клеткой Q не может находиться ни одной отмеченной клетки (в противном случае появится прямоугольный треугольник со сторонами, параллельными сторонам доски; вершины его – красная клетка Q и отмеченная клетка, лежащие на одной вертикали, а также любая другая красная клетка на одной горизонтали с клеткой Q).

Рассмотрим также все вертикали доски, в каждой из которых отмечено не менее двух клеток. Пусть таких вертикалей n ($0 \leq n \leq 8$), и всего в них отмечено N клеток. Закрасим все эти N клеток в синий цвет. Аналогично предыдущему случаю можно убедиться, что на одной горизонтали с любой синей клеткой не может находиться ни одной отмеченной клетки (это, в частности, исключает возможность того, что какая-то отмеченная клетка сначала была окрашена в красный цвет, а потом перекрашена в синий).

Кроме красных и синих, на доске могут оказаться еще какие-то отмеченные клетки – закрасим их в желтый цвет. Заметим, что в одной строке или столбце с желтой клеткой не может быть никакой другой отмеченной клетки – иначе эта пара клеток была бы окрашена в красный или синий цвет. Пусть желтых клеток имеется K .

Понятно, что суммарное число отмеченных клеток: $x = M + n + K$.

Рассмотрим все вертикали доски. M из них «заняты» красными клетками (ибо, как показано выше, на одной вертикали с красной клеткой не может быть никаких других отмеченных клеток). Кроме того, в n вертикалях находятся синие клетки. А так как всего на доске 8 вертикалей, то желтые клетки могут располагаться только на оставшихся $(8 - M - n)$ вертикалях, причем не более, чем по одной клетке на каждой вертикали. Поэтому $K \leq 8 - M - n$.

Если рассмотреть все горизонтали доски, аналогичными рассуждениями получим неравенство $K \leq 8 - N - m$.

Следовательно, получаем два неравенства для суммарного числа клеток x :

$$x = M + N + K \leq M + N + (8 - M - n) = 8 + N - n; \quad (1)$$

$$x = M + N + K \leq M + N + (8 - N - m) = 8 + M - m. \quad (2)$$

Если $n = 0$, т.е. вертикалей с синими клетками не имеется, то и синих клеток нет, т.е. $N = 0$. Но тогда из (1) получаем $x \leq 8 + 0 - 0 = 8$. Таким образом, при отсутствии синих клеток общее число отмеченных клеток не превысит 8. Аналогично, используя (2), можно показать, что при отсутствии красных клеток ($m = 0$) общее число отмеченных клеток также не превысит 8. Ну, а если имеются и синие, и красные клетки – что тогда?

Рассмотрим этот вариант. Итак, пусть $n \geq 1$ и $m \geq 1$. Так как в каждой горизонтали не может быть больше одной синей клетки, то общее число синих клеток не превышает общего числа горизонталей, т.е. $N \leq 8$. Поэтому из (1) получаем: $x \leq 8 + N - n \leq 8 + 8 - 1 = 15$, причем это максимальное значение 15 достигается, очевидно, при $n = 1$ и $N = 8$. Но что означают эти величины? Они означают, что имеется единственная вертикаль с синими клетками, причем синими являются все 8 клеток этой вертикали! А так как на одной горизонтали с любой синей клеткой не может быть других отмеченных клеток, то красных клеток вовсе нет, и $m = 0$. Но это противоречит рассматриваемому нами случаю, для которого должно быть $m \geq 1$. Поэтому значение 15 недостижимо.

Итак, всего отмеченных клеток меньше 15, т.е. не больше 14. С другой стороны, в соответствии с условием задачи можно расставить ровно 14

	K	K	K	K	K	K	K
C							
C							
C							
C							
C							
C							
C							

Рис. 1

клеток. Как это сделать – показано на рисунке 1 (синие клетки обозначены буквой *C*, красные – буквой *K*, желтых клеток не оказалось вовсе):

Легко видеть, что здесь нет ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в отмеченных клетках (даже таких, у которых катеты не параллельны сторонам доски, хотя при решении мы об этом даже и не упоминали). В самом деле, если взять любые три клетки одного цвета, то треугольник получается «вырожденный» (все три вершины лежат на одной прямой), а если выбрать две клетки одного цвета и одну – другого, то он будет тупоугольный.

Ясно, что задача естественным образом обобщается и на случай доски со стороной не 8, а p клеток, и ответ таков: наибольшее число отмеченных клеток равно $2p - 2$.

Через некоторое время возник вопрос: а ведь бывают и другие треугольники – остроугольные, тупоугольные и вырожденные. Интересно, а каков будет ответ в аналогичной задаче для них? Таким образом, одна задача породила еще три, из которых в общем виде (т.е. для досок размером $p \times p$) удалось одолеть... только одну. Негусто? Верно. Зато какой простор для творчества!

Наиболее легкой оказалась задача для *тупоугольных* треугольников. Как ни странно, особенности шахматной доски в решении практически не используются, а на первое место выступают обычные геометрические соображения.

Для шахматной доски ответ таков: 8 клеток. За примером далеко ходить не надо: достаточно отметить все клетки любой вертикали или любой горизонтали, либо же одной из двух больших диагоналей. Тогда центры любых трех клеток будут лежать на одной прямой, и все треугольники будут вырожденные.

Докажем, что больше 8 клеток отметить нельзя. Используем метод «от противного». Допустим, что удалось все-таки отметить не менее 9 клеток с соблюдением требований условия. Очевидно, центры всех этих девяти клеток не могут лежать на одной прямой – размеры доски не позволяют. Выберем из отмеченных клеток только 6, но таких, что *не все* центры этих клеток лежат на одной прямой (то, что такие 6 клеток можно выбрать, также легко доказать «от противного»: если предположить, что центры *любых* шести клеток лежат на одной прямой, то отсюда быстро следует, что центры *всех* имеющихся клеток лежат на одной прямой – противоречие!).

А далее абстрагируемся напрочь от шахматной доски, т.е.

докажем более общую теорему (из которой, очевидно, будет следовать то, что мы собираемся доказать).

Теорема. Пусть на плоскости лежат 6 попарно несовпадающих точек, причем не все они лежат на одной прямой. Тогда найдется тупоугольный треугольник с вершинами в каких-то трех из этих точек.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Среди данных шести точек найдутся, по крайней мере, четыре, лежащие на одной прямой (обозначим эту прямую l , а точки назовем *сидящими*). Возьмем любую точку A , не лежащую на l (такая точка *непрерывно* есть, так как не все точки лежат на одной прямой). Опустим из нее перпендикуляр AB на прямую l . Точка B может совпасть с одной из сидящих точек, но может и не совпасть. В любом случае хотя бы 3 из сидящих точек не совпадут с точкой B . И по крайней мере 2 из этих трех точек окажутся *по одну сторону* от точки B . Пусть это точки C и D , причем, для определенности, точка C находится ближе к точке B , чем точка D . Тогда треугольник ACD – тупоугольный. Убедиться в этом легко. В самом деле, треугольник ABC – прямоугольный, поэтому прилегающий к гипотенузе AC угол ACB – острый. Но тогда смежный с ним угол ACD – тупой, и треугольник ACD – тупоугольный.

2) Никакие 4 точки не лежат на одной прямой, но есть 3 точки, сидящие на одной прямой l . Обозначим их через A, B, C (точка B лежит между точками A и C). Возьмем любую из остальных трех точек (обозначим ее D) и опустим перпендикуляр DE на прямую l . Если точка E не совпала ни с одной из точек A, B, C , то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки E . Но тогда, аналогично предыдущему случаю, появится тупоугольный треугольник! Заметим, что тупоугольный треугольник обнаружится и в случае, когда точка E совпадет с точкой A или с C (ибо опять найдутся две точки на прямой l по одну сторону от E). Поэтому единственная возможность, чтобы не возник тупоугольный треугольник – это совпадение точки E с B , т.е. произвольная точка, не лежащая на l , должна спроектироваться в точку B . Разумеется, это верно для любой из трех точек, не лежащих на l . Но тогда эти 3 точки вместе с точкой B образуют четверку точек, лежащих на одной прямой, перпендикулярной l . Противоречие с рассматриваемым случаем (см. начало абзаца).

3) Никакие 3 точки не лежат на одной прямой. Проведем всевозможные отрезки, попарно соединяющие наши 6 точек. Эти отрезки ограничивают некоторый выпуклый многоугольник, причем часть точек может лежать внутри него (иногда

говорят: *натянем выпуклую оболочку* на данные 6 точек – по смыслу то же самое). Здесь опять же возможны несколько случаев:

3.1) 3 точки являются вершинами треугольника, а остальные 3 лежат внутри треугольника. Выберем любую из внутренних точек и соединим ее отрезками с вершинами треугольника. Сумма трех образовавшихся углов равна 360° , поэтому среди них непременно есть тупой угол, что порождает наличие тупоугольного треугольника. Если же предположить, что один из углов – развернутый, то тогда, очевидно, имеются три точки, лежащие на одной прямой, что недопустимо.

3.2) 4 точки являются вершинами выпуклого четырехугольника, а остальные 2 лежат внутри четырехугольника. Выберем любую из внутренних точек и соединим ее отрезками с вершинами четырехугольника. Сумма четырех образовавшихся углов равна 360° . Если все они – прямые, то тогда, очевидно, объявятся три точки, лежащие на одной прямой, что недопустимо, поэтому среди них непременно есть тупой угол, что порождает наличие тупоугольного треугольника.

3.3) 5 точек являются вершинами выпуклого пятиугольника, а шестая лежит внутри. Здесь ситуация еще проще. Сумма внутренних углов при вершинах пятиугольника равна, как известно, 540° . Поэтому среди них непременно найдется тупой угол (иначе сумма углов не превышала бы $90^\circ \times 5 = 450^\circ$). Следовательно, вершина с тупым углом при ней вместе с двумя соседними вершинами как раз и являются вершинами тупоугольного треугольника.

3.4) Все 6 точек являются вершинами выпуклого шестиугольника. Здесь рассуждения аналогичны. Сумма внутренних углов при вершинах шестиугольника равна 720° . Поэтому среди них непременно найдется тупой угол (иначе сумма углов не превышала бы $90^\circ \times 6 = 540^\circ$). Значит, вершина с тупым углом при ней вместе с двумя соседними вершинами как раз и являются вершинами тупоугольного треугольника.

Если же обобщить задачу на случай квадрата $p \times p$, то ответ, естественно, будет таков: при $p = 2$ можно отметить все 4 клетки; при $p = 3$ или $p = 4$ число отмеченных клеток возрастает до 5 – пример приведен на рисунке 2.

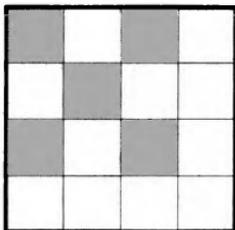
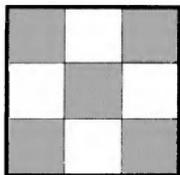


Рис. 2

Если же $p \geq 5$, то отметить можно p клеток – все клетки любой вертикали, горизонтали или большой диагонали.

Теперь со вздохом перейдем к неподдавшимся задачам. Начнем с более простой (во всяком случае, на первый взгляд) – с вырожденными треугольниками. Легко найти ограничение сверху. Так как в каждой строке может быть отмечено не больше двух клеток (иначе три отмеченных клетки в строке мгновенно порождают вырожденный треугольник), то суммарное число отмеченных клеток для шахматной доски не превышает $2 \times 8 = 16$ (а для доски $p \times p$ – очевидно, $2p$ клеток). Для шахматной доски это значение достигается – вот пример (рис.3).

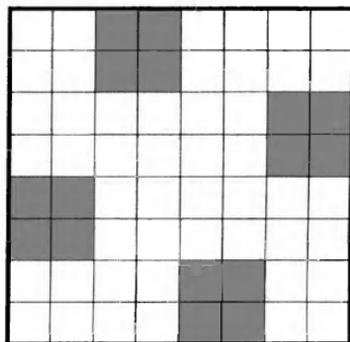


Рис. 3

Имеются и другие способы отметить 16 клеток, но гораздо менее симпатичные. Так что для шахматной доски задача решена полностью. Что касается доски $p \times p$, то с помощью компьютера был произведен поиск способов раскраски $2p$ клеток для p от 2 до 13. Оказалось, что он *существует* для всех этих p . Что касается $p > 13$, то пока остается только развести руками. И даже не ясно, куда следует направить усилия: на поиск неких общих способов раскраски $2p$ клеток, либо на поиск каких-то дополнительных ограничений для больших p .

Наконец, самый крепкий орешек – остроугольные треугольники. Начнем опять же с шахматной доски. Не составляет труда отметить 16 клеток – все клетки любых двух соседних вертикалей или горизонталей. После этого возможность отметить большее число клеток представляется если и не безнадежной, то весьма маловероятной. И тем не менее такая возможность есть! Вот как можно отметить 17 клеток (рис.4).

С помощью компьютера было проверено (ох, и долго же он мучился!), что 18 клеток отметить невозможно, но это, к сожалению, никак нельзя считать полноценным доказательством.

Если же говорить об обобщении нашей задачи для квадрата $p \times p$, то

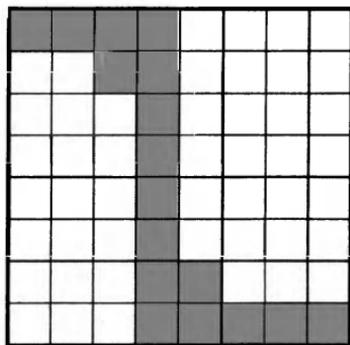


Рис. 4

такой «Z-образный» принцип можно использовать для всех $p \geq 5$. Для $p = 3$ или $p = 4$ он не годится (для них, по-видимому, максимальным значением будет 6 и 8 клеток соответственно, т.е. 2 соседние строки или столбца), а для $p = 2$ ответ очевиден: можно отметить все 4 клетки доски.

Вот какова обстановка на текущий момент в отношении треугольников на шахматной доске. А поскольку, как подметил еще Франсуа Рабле, аппетит приходит во время еды, то никто не воспрепятствует нам заявить, что свет не сошелся клином только на треугольниках! Поэтому естественным расширением задачи в другом (образно говоря, *перпендикулярном* направлении) является поиск наибольшего количества отмеченных клеток, чтобы не нашлось ни одного:

- параллелограмма;
- трапеции;
- ромба;
- прямоугольника;
- квадрата

с вершинами в центрах отмеченных клеток (о многоугольниках с большим количеством вершин даже и не упоминаем!).

Итак, каковы достижения на этом фронте? Для параллелограммов задача решена полностью, ответ здесь: 15 клеток – вот пример (рис.5).

Кое-кто может усомниться: а откуда следует, что здесь и впрямь не найдется параллелограмма? Что ж, рассеем недоверие. Отмеченные клетки, как видно, представляют собой объединение всех клеток верхней горизонтали и левой вертикали. Выберем произвольным образом четыре отмеченных клетки. Если хотя бы три из них находятся на одной (т.е. верхней) горизонтали или на одной (т.е. левой) вертикали, то получится четырехугольник с тремя вершинами на одной прямой, что никак не может быть параллелограммом. Если же две выбранных клетки находятся

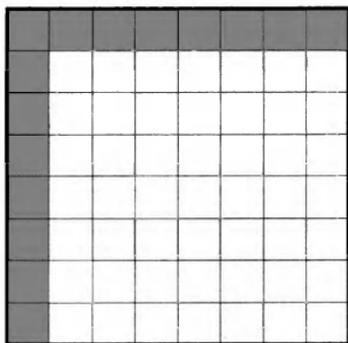


Рис. 5

на верхней горизонтали и две – на левой вертикали, то в образуемом ими четырехугольнике противоположные стороны вообще *перпендикулярны*! Стало быть, параллелограмм никак не получается.

Докажем, что более 15 клеток отметить невозможно. Для

этого отметим произвольным образом $x \geq 16$ клеток и убедимся, что при этом найдется хотя бы один параллелограмм с вершинами в центрах отмеченных клеток. Для этого примем длину стороны клетки за 1 (и тогда расстояние между центрами соседних клеток, имеющих общую сторону, тоже равно 1).

Выберем только те горизонталы, в которых имеются отмеченные клетки, и пронумеруем их произвольным образом числами от 1 до n (очевидно, $n \leq 8$). Обозначим для каждого k количество клеток, отмеченных в k -й горизонтали, через m_k (очевидно, $m_1 + m_2 + \dots + m_n = x$). Возьмем k -ю горизонталь и рассмотрим расстояния между центром самой левой отмеченной клетки этой горизонтали и центрами остальных отмеченных клеток. Так как всего на горизонтали m_k клеток, то таких расстояний окажется ровно $m_k - 1$, причем все они *различны* (ибо левая клетка всегда одна и та же, а правые – разные). Определим такие расстояния для всех k горизонталей. Всего получится

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \dots + (m_n - 1) = (m_1 + m_2 + \dots + m_n) - n = x - n$$

расстояний. Так как $x \geq 16$ и $n \leq 8$, то $x - n \geq 16 - 8 = 8$. А какие значения может принимать любое из расстояний? Очевидно, это целое число в пределах от 1 (когда клетки – соседние) до 7 (когда клетки лежат на противоположных концах горизонтали). Целых чисел от 1 до 7 включительно имеется ровно 7, а расстояний, как мы уже выяснили – не меньше 8. Следовательно, какие-то два расстояния совпадают, причем это не могут быть расстояния «внутри» одной горизонтали (поскольку, как мы выяснили выше, все расстояния в пределах одной горизонтали различны).

Итак, найдутся такие две отмеченные клетки A и B на одной горизонтали и две клетки C и D на другой горизонтали, что $AB = CD$. А раз так, то они являются вершинами параллелограмма (поскольку его противоположные стороны AB и CD равны и параллельны).

Понятно, что для квадрата $p \times p$ ответом будет число $2p - 1$.

Также удалось для шахматной доски решить задачу о прямоугольниках. Ответ здесь – 24 клетки. Вот пример (рис.6).

Надо сказать, что проверить отсутствие прямоугольников с вершинами в центрах клеток не очень-то просто: ведь прямоугольники мо-

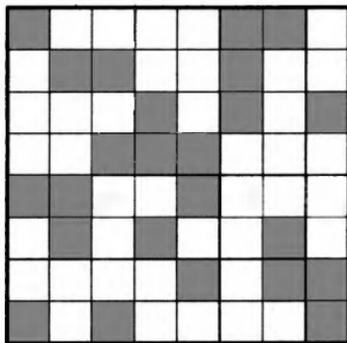


Рис. 6

гут быть ориентированы произвольным образом. Тем не менее, запасшись терпением, можно это проделать за разумное время. Но этого мало – надо еще убедиться, что более 24 клеток отметить невозможно. Эта задача тоже непростая, и самое неприятное – она, в отличие от рассмотренных выше задач, имеет нудное переборное решение. Начинается оно так: допустим обратное – т.е. что все-таки можно отметить не менее 25 клеток. Тогда (вечный принцип Дирихле!) найдется горизонталь, в которой отмечено не меньше 4 клеток. А далее рассматриваются варианты, когда в горизонтали с наибольшим числом отмеченных клеток это число принимает различные значения от 4 до 8 включительно. Наконец, для каждого варианта доказывается наличие прямоугольника с вершинами в центрах каких-то четырех отмеченных клеток. Вот и все! Можете сами аккуратно довести решение до конца, а мы занимать место здесь не будем.

Разумеется, обобщение полученного результата на квадрат произвольных размеров невозможно.

Иное дело – трапеция. Здесь сравнительно несложно получить ответ, если к слову «трапеция» добавить «основание которой параллельно какой-либо стороне квадрата».

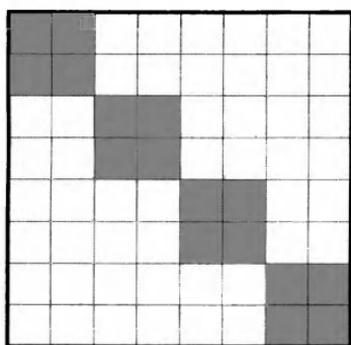


Рис. 7

Тогда максимальное число отмеченных клеток равно 16 – см. пример (рис.7).

Докажем, что больше клеток отметить невозможно. Доказательство слегка напоминает случай с параллелограммами. Отметим произвольным образом $x \geq 17$ клеток и убедимся, что при этом найдется хотя бы одна трапеция с вершинами в центрах отмеченных клеток. Как и ранее, примем длину стороны клетки

за 1. Теперь, используя уже применявшийся нами принцип Дирихле, заметим, что хотя бы в одной горизонтали (назовем ее «горизонталь Γ_1 ») имеется не меньше 3 отмеченных клеток (иначе общее число отмеченных клеток не превышало бы $2 \times 8 = 16$). Убедимся, что найдется *другая* горизонталь Γ_2 , в которой отмечено не меньше 2 клеток. В самом деле, если в каждой из остальных семи горизонталей отмечено не больше 1 клетки, то даже если горизонталь Γ_1 вся состоит из отмеченных клеток, то суммарное количество отмеченных клеток не превышает $8 + 7 = 15$.

Итак, рассмотрим горизонтали Γ_1 и Γ_2 . На горизонтали Γ_1 не меньше трех отмеченных клеток; выберем любые три из них. Пусть расстояния от самой левой из них до двух остальных равны a и b ; очевидно, $a \neq b$. Пусть расстояние между двумя отмеченными точками горизонтали Γ_2 равно c . Так как никакое число не может равняться одновременно двум неравным числам, то либо $c \neq a$, либо $c \neq b$. А раз так, то мы имеем либо трапецию с основаниями c и a , либо трапецию с основаниями c и b (соответственно). Все!

Обобщение этого результата на доску размером $p \times p$ получается не столь простым, как для параллелограммов. Правда, если p – четное, то, используя тот же принцип, что и для доски 8×8 , можно добиться максимального числа отмеченных клеток, равного $2p$. Но при нечетном p такое значение недостижимо. Правда, доказать это не очень-то просто. Попробуйте сами это сделать.

Если же слова о параллельности оснований трапеции сторонам доски из условия исключить, то задача резко усложняется, и пока никакого продвижения в этом направлении нет. Как и о расположении *квадратов*. Здесь единственная надежда – на читателей. Помогите!

ГРЕКО-ЛАТИНСКИЕ ЛЯГУШКИ

Так называемая «греко-латинская» задача была поставлена еще в средние века. Вкратце суть ее такова. Возьмем n различных греческих букв и столько же различных латинских букв. Ясно, что из них можно составить ровно n^2 различных пар, содержащих одну греческую и одну латинскую букву. Требуется расставить эти n^2 пар в клетки квадрата $n \times n$ таким образом, чтобы в каждой строке и каждом столбце каждая буква (и греческая, и латинская) встречалась ровно по одному разу. Спрашивается: при каких n такое возможно?

Проблема долгое время благополучно существовала без какого-либо продвижения вперед, пока в 1782 году за нее не взялся Леонард Эйлер. Он сумел доказать, что требуемая расстановка существует при нечетных n , а также при n , делящихся на 4 (такие числа часто называют «четно-четными»). В качестве иллюстрации на рис.1 изображены греко-латинские квадраты для $n = 4$ и $n = 5$.

Что же касается четных n , не делящихся на 4 (т.е. «четно-нечетных»), то здесь результаты оказались куда как скромнее. Правда, для $n = 2$ чрезвычайно легко доказать, что требуемой расстановки не существует (читатель может убедиться в этом сам

$\alpha - a$	$\beta - b$	$\gamma - c$	$\delta - d$	$\alpha - a$	$\beta - b$	$\gamma - c$	$\delta - d$	$\varepsilon - e$
$\beta - c$	$\alpha - d$	$\delta - a$	$\gamma - b$	$\beta - c$	$\gamma - d$	$\delta - e$	$\varepsilon - a$	$\alpha - b$
$\gamma - d$	$\delta - c$	$\alpha - b$	$\beta - a$	$\gamma - e$	$\delta - a$	$\varepsilon - b$	$\alpha - c$	$\beta - d$
$\delta - b$	$\gamma - a$	$\beta - d$	$\alpha - c$	$\delta - b$	$\varepsilon - c$	$\alpha - d$	$\beta - e$	$\gamma - a$
$\varepsilon - d$	$\alpha - e$	$\beta - a$	$\gamma - b$	$\varepsilon - d$	$\alpha - e$	$\beta - a$	$\gamma - b$	$\delta - c$

Рис. 1

на досуге). Случай $n = 6$ уже требует весьма обширного перебора вариантов, произвести который до конца Эйлер не сумел (в своем 75-летнем возрасте он много болел и к тому же совершенно ослеп). Тем не менее, проанализировав множество комбинаций, он с огромной долей уверенности мог утверждать, что и здесь греко-латинская расстановка невозможна. Понятно, что еще большие значения n (т.е. 10, 14, 18...) стали совершенно неподъемными.

Итак, сведем в таблицу результаты, которых удалось достичь Леонарду Эйлеру.

n	Существует ли...
нечетное	да
четно-четно	да
2	нет
6	скорее всего, нет
10, 14, 18 и т.д.	ничего не известно

Будучи не в силах одолеть проблему до конца, Эйлер выдвинул гипотезу, что требуемая расстановка невозможна ни для каких четно-нечетных n (т.е. в двух нижних клетках правого столбца таблицы также должно стоять слово «нет»). Доказывать свое утверждение он предоставил право потомкам.

Ясность в этом вопросе появилась очень нескоро. Подтверждения гипотезы для $n = 6$ пришлось ждать почти 120 лет – до 1901 года, когда французский математик Г.Тарри сумел выполнить исчерпывающий перебор и убедился в правоте Эйлера. А для всех остальных n гипотеза была... опровергнута! В 1959 году

американцы Э.Паркер, Р.Боус и С.Шрикхенд разработали общие правила построения греко-латинских квадратов для всех четно-нечетных n , начиная с 10. Позже, с развитием компьютерной техники, выяснилось, что таких квадратов очень и очень много. Так что здесь Эйлер ошибся, что, конечно, никак нельзя поставить ему в упрек.

Казалось бы, коллективными усилиями проблема исчерпана, но однажды появились настолько поразительные ассоциации с «греко-латинской» задачей, что просто так отмахнуться от них и объявить простым совпадением было просто невозможно.

Началось с того, что на одном из нынешних математических турниров была предложена такая задача.

На некоторых клетках шахматной доски сидело по лягушке. В некоторый момент все они одновременно перепрыгнули на соседние клетки (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину). При этом на каждой клетке вновь оказалось не более одной лягушки, но все бывшие соседи перестали быть соседями. Какое наибольшее число лягушек могло сидеть на доске?

Давайте рассмотрим задачу для квадратной доски произвольных размеров — не 8×8 , а $n \times n$, где n — произвольное натуральное число. Сделаем оценку сверху возможного числа лягушек, а именно — докажем, что оно не может превышать половины от общего количества клеток доски (равного, очевидно, n^2). Действительно, предположим противное: что лягушки на доске занимают *строго больше* половины ее полей. Это значит, что число пустых полей *строго меньше* количества лягушек. Следовательно, найдется лягушка, которая прыгнула на клетку, где перед прыжком сидела другая лягушка (поскольку, согласно условию, каждая лягушка после прыжка также оказалась на отдельной клетке).

Итак, пусть на соседних клетках сидели лягушки A и B , причем лягушка A прыгнула на клетку, где до прыжка сидела лягушка B . Лягушка B также прыгнула на одну из соседних клеток, но в результате лягушки остались соседями! Противоречие. Поэтому предположение о том, что лягушек было больше половины от общего числа полей доски, неверно.

Вывод: количество лягушек не превышает $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$. Здесь квадратные скобки означают целую часть, т.е. наибольшее целое число, не превышающее выражения в этих скобках. Можно, конечно, избавиться от знака целой части, но тогда формула

будет по-разному выглядеть для четных и нечетных n , что как-то не очень желательно – красота теряется!

Тогда естественным образом возникает следующий вопрос: а существует ли требуемое расположение на доске $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ лягушек (естественно, вместе с необходимой схемой их прыжков)? Сразу чувствуется, что поиск возможности такого расположения должен быть чуть легче для *нечетных* n (ибо для них величина $\left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$ все же *строго меньше* половины количества клеток доски, в отличие от четных n , для которых они равны). Действительно, так оно и есть. Не надо быть семи пядей во лбу, чтобы предложить возможный способ первоначальной расстановки и схемы прыжков для любого нечетного n . А именно: выделим на доске отдельно центральную клетку, а остальную часть доски разобьем на вложенные друг в друга «квадратные кольца» толщиной в одну клетку (легко видеть, что в каждом кольце четное число клеток). Расположим в кольцах лягушек так, чтобы каждые две ближайшие лягушки одного кольца были разделены ровно одной пустой клеткой. Схема прыжков тоже проста: все лягушки прыгают, не выходя за пределы «своего» кольца. При этом, если пронумеровать кольца по порядку от центра доски, то лягушки, сидящие в кольцах с нечетными номерами, прыгают по

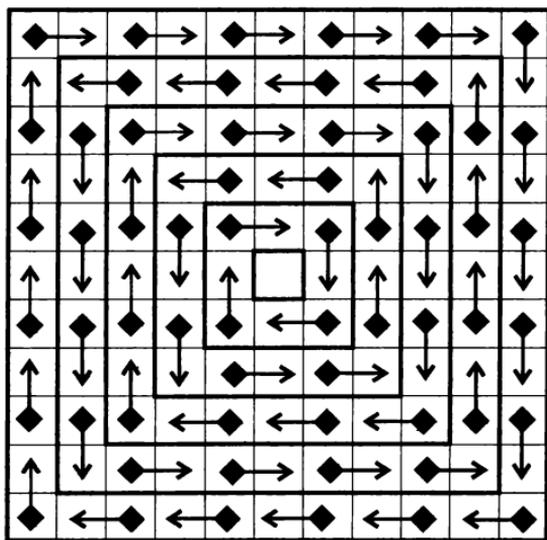


Рис. 2

часовой стрелке, а в кольцах с четными номерами – против часовой стрелки (на рис.2 показан пример для доски 11×11 ; здесь лягушки обозначены ромбиками, а направления прыжков – стрелками). Убедитесь – полный ажур!

Перейдем к четным n . Сразу видно, что для наименьшего четного $n = 2$ рассадить $\left\lfloor \frac{2^2}{2} \right\rfloor = 2$ лягушек невозможно. В самом деле: в квадрате 2×2 любые две клетки – соседние, поэтому и две лягушки, как бы они ни прыгали, останутся соседями.

А вот для $n = 4$ расположить 8 лягушек удалось (см. рис.3). Немного поразмыслив, можно заметить, что конфигурацию, изображенную на рис.3, можно использовать вообще для любого n , делящегося на 4. Достаточно всего лишь «растиражировать» ее нужное число раз по вертикали и горизонтали. Скажем, для обычной шахматной доски 8×8 следует соединить 4 таких квадрата – и требуемая расстановка 32 лягушек готова.

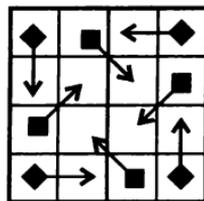


Рис. 3

Вот мы решили задачу и для четно-четных n . Что осталось? Четно-нечетные. При этом для наименьшего из них $n = 2$ задача также легко решается, но ответ здесь – отрицательный (см. выше)¹. Следующее значение n – это 6. Автор затратил массу труда, но ничего не добился: исчерпывающий перебор выполнить не удалось, а ничего другого в голову не шло. Попытка использовать компьютер тоже не привела к успеху: алгоритм вышел очень сложный и путанный, так что пришлось махнуть на все рукой. Поэтому был сделан гипотетический вывод: результат, скорее всего, тоже отрицательный. Ну, а доски еще больших размеров (10×10 , 14×14 и т.д.) оказались далеко за пределом мечтаний.

Итак, резюмируем: что же мы, в конце концов, имеем с нашими лягушками? Итоговые результаты были помещены в таблицу... и оказалось, что она полностью идентична той, которая была составлена по поводу успехов Эйлера в решении «греко-латинской» задачи (посмотрите и убедитесь!). Каково? Совпадение тем более поразительно, что между «греко-латинской» и «лягушачьей» задачами нет ничего общего (кроме, разве что, основы – квадрата $n \times n$).

¹ вследствие чего максимальное число лягушек на доске 2×2 равно 1.

Но если так оказалось, что полученный нами ответ в несложной, в общем-то, задаче, чудесным образом совпал с ответом, полученным гениальным Эйлером при решении им совсем другой (несравненно более трудоемкой) задачи, то каждый из нас может на какое-то время... почувствовать себя самим Леонардом Эйлером! В самом деле – пронзим взглядом таблицу и попытаемся, опираясь на свою интуицию, предсказать, что должно быть записано в двух нижних клетках правого столбца. Автор задачи, как и Эйлер, предположил, что там должно быть слово «нет». Оставалось подождать лет этак 120 или больше, пока не найдет-ся добрая душа, которая одолеет проблему до конца.

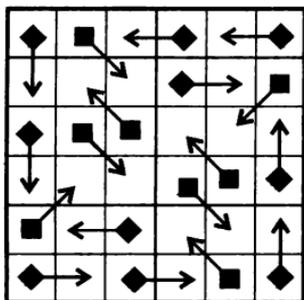


Рис. 4

Но столь длительный срок не потребовался! Буквально через несколько дней после опубликования проблемы на страницах журнала «Квант» в редакцию пришло письмо от студента ННГУ Романа Овсянникова, сумевшего расположить 18 лягушек на доске 6×6 (рис.4).

Лед тронулся, господа присяжные заседатели! Ибо, используя метод Р.Ов-

сянникова, А.Жуков указал способ расстановки $\frac{n^2}{2}$ лягушек для

любого чётно-нечётного n , большего 6. Идею его можно пояснить на примере расстановки 98 лягушек на доске 14×14 . Выделим на краю доски «каемочку», которая по бокам имеет ширину в три клетки, а сверху и снизу – в одну клетку. Эту каемку «заселим» лягушками по идее Р.Овсянникова, и пусть они прыгают так, чтобы остаться в ее пределах (рис.5). «Внутренность» же доски, естественно, разбивается на квадраты 4×4 , в каждом из которых расстановку лягушек и схему их прыжков берем непосредственно из рис.3. После такой передислокации привередливые соседи уже не будут надоедать друг другу своим присутствием.

Итак, оба предположения автора (насчет слов «нет» в таблице) оказались в корне неверны. Правильный ответ: да и еще раз да!

Ну что – все? Задача решена полностью, окончательно и бесповоротно? В математике такое бывает редко. В самом деле – свет, что ли, сошелся клином на *квадратных* досках? Почему бы не обобщить лягушачью проблему на прямоугольные доски различных размеров? Кое-что, конечно, удастся «вытащить» из уже полученных результатов. Скажем, если обе стороны доски

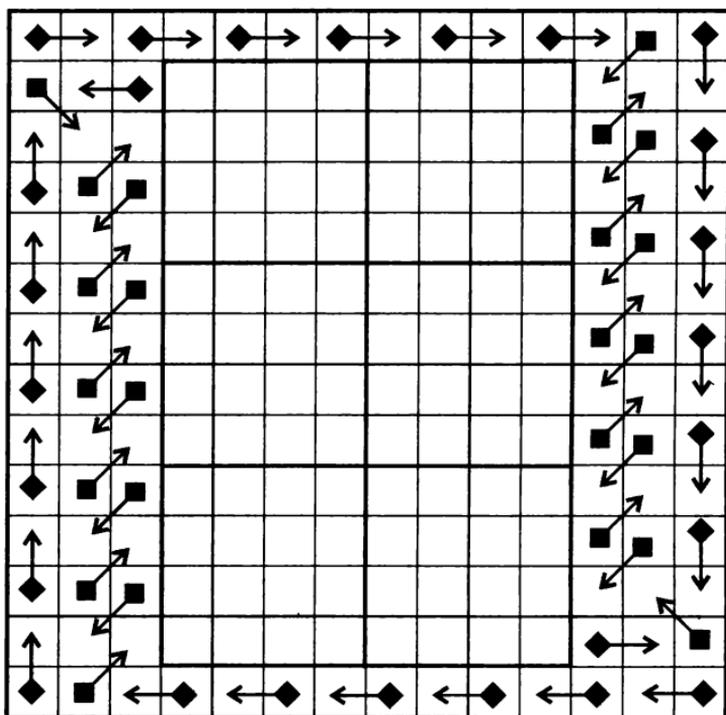


Рис. 5

– четно-четные, то разобьем ее на квадраты 4×4 и воспользуемся рис.3. А если обе стороны – четно-нечетные, то прекрасно подойдет схема из рис.5. Ну, а если хотя бы одна сторона – нечетная, то сказать что-либо трудно. Очень хотелось бы получить здесь помощь от читателя.

Наконец, вот еще одно направление развития сюжета: откажемся от требования, что после прыжка² в каждой клетке находится не более одной лягушки³. Каково наибольшее число лягушек в этом случае? Ответ автору неизвестен даже предположительно.

«СВОЯ ИГРА» И СПРАВЕДЛИВОСТЬ

Однажды автору этого сюжета попались на глаза следующие правила розыгрыша какого-то хоккейного кубка. Сначала команды-участники играют между собой в предвари-

² а возможно, и до прыжка – вот еще вариант!

³ правда, здесь, по-видимому, придется считать соседями также и лягушек, находящихся в одной клетке.

тельном турнире, по результатам которого определяются команды, занявшие 4 самых высоких места. Далее они разбиваются на пары для проведения полуфинальных игр, победители которых встречаются затем в финале.

Вроде бы правила как правила – ничего особенного, но вызывает интерес, *как именно* 4 команды разбиваются на пары для полуфинала. По жребию? Ничего подобного! Порядок таков: команда, занявшая в предварительных играх 1-е место, встречается с командой, занявшей 4-е место, а команда, занявшая 2-е место – с командой, занявшей 3-е место. Но почему? Оказывается, в этом заключено *требование справедливости*. В самом деле, в таком случае в предварительных играх каждая команда стремится не просто попасть в четверку лучших, но и занять место как можно выше, чтобы в полуфинале получить соперника послабей.

Естественно, если по итогам предварительного турнира выделяются не 4, а $2p$ лучших команд, то и их можно по тому же принципу *справедливо* разбить на p пар: первая команда встречается с последней, вторая – с предпоследней и т.д.

Ну, а если в игре встречаются не двое, а большее количество участников – можно ли удовлетворить нашу мечту о справедливости? В качестве примера возьмем хотя бы известную телевикторину «Своя игра» (канал НТВ), где одновременно сражаются *три* игрока. Здесь тоже проводятся предварительные игры, и выявляются 9 лучших игроков. Потом они разбиваются на тройки, и так далее... Но *как* разбиваются – *справедливо* ли? А если нет, то можно ли добиться этой самой справедливости?

Прежде, чем пытаться ответить на это вопрос, сформулируем сначала более строго, чего бы мы хотели. Итак, имеется 9 игроков с различными рейтингами (которым соответствуют порядковые номера в списке лучших игроков предварительного турнира), и мы их разбили на три тройки. Возьмем любых двух игроков X и Y с номерами-рейтингами x и y соответственно ($x < y$). Пусть в одной тройке с игроком X оказались соперники с рейтингами x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), а в одной тройке с игроком Y оказались соперники с рейтингами y_1 и y_2 ($y_1 < y_2$). Наша мечта о справедливости гласит: так как игрок X , согласно рейтингу, *сильнее* игрока Y , то его соперники должны быть *слабее* соперников игрока Y .

Внезапно становится понятно, что даже в такой очевидной ситуации последнее утверждение можно трактовать по-разному.

Трактовка 1-я: каждый соперник игрока X слабее каждого

соперника игрока Y . Иными словами, должно выполняться довольно «жесткое» неравенство $y_1 < y_2 < x_1 < x_2$.

Трактовка 2-я: каждому сопернику игрока X можно поставить во взаимно однозначное соответствие более слабого соперника игрока Y , т.е. имеет место более «мягкая» пара неравенств: $y_1 < x_1$ и $y_2 < x_2$ (а неравенство $y_2 < x_1$ необязательно).

Возможны и «ослабленные» варианты обеих трактовок – если заменить строгие неравенства нестрогими (т.е., собственно говоря, термины «сильнее» и «слабее» терминами «не слабее» и «не сильнее» соответственно). Для первой трактовки получится $y_1 < y_2 \leq x_1 < x_2$, для второй – $y_1 \leq x_1$ и $y_2 \leq x_2$. Итого – 4 варианта. С какого начнем? Давайте с самого «легкого» – т.е. ослабленной 2-й трактовки. Если удастся скомпоновать тройки для нее, тогда замахнемся на что-нибудь посложней, а иначе и пытаться бессмысленно.

К сожалению, даже при таких условиях разбить игроков на тройки невозможно. Для этого сначала убедимся, что тогда в одну тройку с 1-м игроком не может попасть никакой игрок с номером от 2 до 7. Действительно, предположим, что некий m -й игрок ($2 \leq m \leq 7$) попал в одну группу с 1-м игроком. Тогда один из соперников более слабого 8-го игрока должен иметь хотя бы одного соперника не менее сильного, чем 1-й игрок. Но такой игрок единственный – сам 1-й игрок. Поэтому 8-й игрок должен попасть в одну тройку с 1-м и m -м игроками. Аналогично рассуждая, получаем, что и 9-й игрок должен попасть в ту же тройку. Но тогда в тройке уже набирается четверо игроков – противоречие! Итак, никакой игрок с номером от 2 до 7 не может попасть в одну тройку с 1-м игроком. Значит, в одной тройке с 1-м игроком без вариантов оказываются 8-й и 9-й игроки (остальным нельзя!). А теперь взглянем на ситуацию с другого конца. У 8-го игрока одним из соперников оказался 9-й игрок. Значит, у более сильного 7-го игрока один из соперников должен быть не сильнее 9-го игрока. Но такой игрок единственный – сам 9-й игрок. Посему 7-й игрок должен быть в одной тройке с 9-м игроком. Однако, тройка, включающая в себя 9-го игрока, уже полностью «укомплектована», и 7-й игрок в нее «не влезет». Противоречие!

Итак, наша надежда на справедливость рухнула – желаемое разбиение недостижимо даже в самом «нежном» варианте. Как ни крути, придется снижать планку, чтобы хоть как-то ее преодолеть. Попытаемся удовлетворить более либеральным требованиям: пусть, если игрок X сильнее игрока Y , то *сумма*

номеров соперников игрока X должна быть больше суммы номеров соперников игрока Y .

Обратим внимание, что такое требование выполняется «автоматически», если игроки X и Y попали в одну тройку. В самом деле, если сумма номеров игроков этой тройки равна S , то суммы номеров соперников игроков X и Y соответственно равны $S - x$ и $S - y$, а так как $x < y$, то $S - x > S - y$, что и требовалось.

Эти измышления наводят на весьма плодотворную идею: а что, если нам удастся так разбить игроков по группам, что суммы номеров игроков во *всех* группах окажутся одинаковы? Применяя такие же рассуждения, мы получим, что тогда требование условия будет выполняться для *любых* двух игроков – и организаторы турнира добьются своего. Но можно ли это сделать? Да! Прекрасной иллюстрацией тому является... знакомый многим с детства *магический квадрат третьего порядка*:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

В нем как раз расположены числа от 1 до 9, и во всех строках суммы равны 15, так что, следуя им, можно разбить игроков по тройкам, например, так: (1,8,6), (3,5,7) и (2,4,9). А можно «пойти» по столбцам и получить несколько иное распределение: (3,4,8), (1,5,9) и (2,6,7). Кстати, примерно такую схему используют и организаторы «Своей игры» – впрочем, от эрудитов-интеллектуалов другого и ожидать не приходится!

Что ж, теперь степень справедливости «Своей игры» нам известна. Но, как нередко бывает в подобных случаях, может возникнуть желание обобщить достигнутые результаты. В связи с этим появилась такая задача:

Обобщенная задача. В интеллектуальной игре участвуют сразу n игроков ($n \geq 2$). По итогам предварительных игр в финал соревнований допустили tn лучших игроков ($t \geq 2$), которые получили порядковые номера от 1 до tn в соответствии с достигнутыми результатами.

Организаторы турнира собираются разбить игроков на t групп по n человек и провести одновременно t игр. Чтобы хоть как-то поощрить участников, лучше выступивших на предварительном этапе, они хотят так распределить игроков по группам, чтобы выполнялось условие: если номер игрока A

меньше номера игрока B , то сумма номеров всех соперников игрока A (попавших с ним в одну группу) должна быть меньше суммы номеров соперников игрока B .

При каких m и n это можно сделать?

Как видим, телевизионная «Своя игра» представляет собой частный случай данной задачи при $m = n = 3$. Причем многие рассуждения, использованные нами в этом частном случае, полностью применимы и для общей проблемы. Например, если можно разбить игроков на m групп по n человек так, чтобы суммы номеров игроков, попавших в одну группу, оказались равны, то мы своего добьемся. Поэтому существенным вкладом в решение нашей обобщенной задачи могло бы стать решение следующей вспомогательной задачи:

Вспомогательная задача. *При каких натуральных $m \geq 2$ и $n \geq 2$ можно числа от 1 до mn разбить на m групп по n чисел в каждой так, чтобы суммы чисел во всех группах были равны?*

Если при каких-то m и n это сделать можно, то и распределить игроков требуемым образом можно. Правда, отсюда пока еще не следует, что если нельзя разбить числа на группы с одинаковыми суммами номеров, то нельзя добиться и выполнения требований условия обобщенной задачи – а вдруг и при каком-то «неравном» разбиении требования условия все-таки окажутся соблюдены? Поэтому сначала займемся именно этим «скользким» моментом, а потом вернемся к вспомогательной задаче.

Итак, пусть игроки каким-то образом распределены по группам, причем суммы их номеров *не во всех* группах одинаковы. Среди сумм номеров для всех групп выберем наибольшую (обозначим ее S_1) и *вторую по величине* (обозначим ее S_2). Итак, в каких-то группах (возможно, всего в одной) суммы номеров участников *не меньше* S_1 (такие группы назовем *большесуммными*), а во всех остальных группах – *не больше* S_2 (такие группы назовем *меньшесуммными*). Заметим, что так как S_1 и S_2 – натуральные числа, и $S_1 > S_2$, то $S_1 \geq S_2 + 1$. Допустим, в списке игроков есть два последовательных номера k и $k + 1$ такие, что номер k оказался в какой-либо меньшесуммной группе, а номер $k + 1$ – в какой-либо большесуммной группе. Тогда сумма номеров соперников игрока номер k *не больше* $S_2 - k$, а сумма номеров соперников игрока номер $k + 1$ *не меньше* $S_1 - k - 1$. А поскольку $S_1 - k - 1 \geq (S_2 + 1) - k - 1 = S_2 - k$, то требование условия *не выполняется!* Ну, а если нет двух последовательных номеров k и $k + 1$ таких, что номер k оказался в какой-либо меньшесуммной группе, а номер $k + 1$ – в какой-либо большесуммной группе? Ясно, что такое возможно

только если *все* номера, попавшие в большесуммные группы, меньше *всех* номеров, попавших в меньшесуммные группы. Однако, если *каждое* число какой-то большесуммной группы меньше *каждого* числа какой-то меньшесуммной группы, то сумма всех чисел большесуммной группы будет *меньше* суммы всех чисел меньшесуммной группы. Но это противоречит тому, что $S_1 > S_2$.

Итак, если суммы номеров не во всех группах одинаковы, то требование условия не может быть выполнено.

Что ж, теперь можно утверждать, что обобщенная задача полностью эквивалентна вспомогательной. Осталось всего ничего – решить вспомогательную задачу. Приступим?

Рассмотрим следующие варианты (которые, очевидно, исчерпывают все возможности):

1) n – четное, m – любой четности.

Этот случай весьма прост. Здесь $n = 2q$ (q – натуральное). Из заданных чисел от 1 до $mn = 2mq$ сначала образуем mq пар следующим образом:

- 1-я пара – числа 1 и $2mq$;
- 2-я пара – числа 2 и $2mq - 1$;
-
- mq -я пара – числа mq и $mq + 1$.

Суммы чисел каждой пары одинаковы (равны $2mq + 1$). Поэтому разбить *все* числа на m групп по $2q$ чисел не составляет труда: в каждую группу включим по q пар (произвольным образом). Так как суммы чисел во всех парах равны, то и суммы чисел во всех группах равны (ибо каждая группа содержит поровну пар).

Итак, ответ для данного варианта: *можно*.

2) n – нечетное, а m – четное.

И этот случай ничуть не сложнее предыдущего. Так как даны числа от 1 до mn включительно, то их сумма, как легко видеть,

равна $\frac{mn(mn + 1)}{2}$ (арифметическая прогрессия!). Ну, а сумма

номеров в каждой группе в m раз меньше, и равна $\frac{n(mn + 1)}{2}$.

Если m – четное, а n – нечетное, то это значение *нецелое* (ибо оба сомножителя в числителе – нечетные, а в знаменателе фигурирует двойка). Поэтому при четном m и одновременно нечетном n нельзя разбить числа по группам так, чтобы суммы чисел во всех группах были равны.

Итак, ответ для данного варианта: *нельзя*.

3) n и m — оба нечетные.

Это — самый тяжелый случай, с ходу его не возьмешь. Во всяком случае, при $m = n = 3$ задача решается (мы это сделали чуть выше). Немного покопавшись в памяти, можно вспомнить, что поскольку существуют магические квадраты *любого* нечетного порядка, то утвердительным будет ответ и для любых нечетных $m = n$. Но как быть при $m \neq n$?

Здесь надо отвлечься от теории и попробовать выполнить распределение хотя бы для небольших m и n . Как правило, это оказывается возможным всегда (что вселяет оптимизм), но наиболее трудно добиться успеха при больших m и малых n . Оно и неудивительно: гораздо легче разбить общую сумму на малое число больших равных сумм, чем на большое число малых равных сумм. Поэтому давайте займемся наиболее трудоемким (по крайней мере, на первый взгляд) случаем: $n = 3$ (при произвольном нечетном $m = 2p + 1$, где p — натуральное). Здесь мы имеем дело с натуральными числами от 1 до $3(2p + 1) = 6p + 3$ включительно. Как-то сразу в голову не приходит способ разбивки этих чисел на $2p + 1$ групп с равными суммами. Минуточку! А ведь можно проблему упростить. Заметим, что если от всех чисел отнять одно и то же число, то на равенстве сумм чисел в группах это никак не отразится: если суммы были равны, то они и останутся равны, а если нет — то нет. Поэтому давайте от всех чисел отнимем по $3p + 2$. Но почему именно столько? А потому, что в результате получится набор последовательных целых чисел от $-(3p + 1)$ до $3p + 1$, т.е. набор чисел, симметричный относительно нуля. Сумма всех этих чисел равна 0 (что неудивительно — при сложении каждое число взаимно уничтожается своим «антиподом»). Поэтому и сумма чисел в каждой тройке тоже должна равняться 0 — а этого достичь куда проще! Далее каждую такую тройку с нулевой суммой будем называть *нуль-тройкой*. Так как сам 0 входит в наш набор чисел, то одну из нуль-троек с его «участием» мы можем себе представить: это 0 и еще два числа, равные по абсолютной величине, но с противоположными знаками. Во всех же остальных нуль-тройках либо одно число положительное, а другие два отрицательные, либо наоборот. Но тогда если мы возьмем три целых числа a, b, c , лежащих между 1 и $3p + 1$, причем $a = b + c$, то они «порождают» сразу две подходящих нуль-тройки: $(a, -b, -c)$ и $(-a, b, c)$. Так не подбирать ли нам нуль-тройки именно таким способом — сразу по две? Такой подход оказался успешным. Не спрашивайте только, что здесь «сработало»:

найтие, откровение свыше, или просто повезло, но выяснилось, что справедлива следующая лемма:

Лемма 1. Пусть даны натуральные числа от 1 до $3p + 1$. Тогда можно одно из этих чисел отбросить, а остальные разбить на p троек так, чтобы одно из чисел каждой тройки равнялось сумме двух других.

Доказательство. Обозначим число, которое мы отбросим, через a_0 , а тройки чисел — через (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , ..., (a_p, b_p, c_p) , причем выполняются равенства: $a_1 = b_1 + c_1$, $a_2 = b_2 + c_2$, ..., $a_p = b_p + c_p$. Дело за малым — подобрать нужным образом все эти числа. Для этого первоначально выделим все числа, делящиеся на 3. Всего их имеется ровно p : 3, 6, ..., $3p - 3$, $3p$. Присвоим эти значения числам b_i ($i = 1, 2, \dots, p$) в убывающем порядке, т.е. $b_1 = 3p$, $b_2 = 3p - 3$, ..., $b_p = 3$. Из оставшихся $2p + 1$ чисел отберем p самых больших и присвоим эти значения числам a_i ($i = 1, 2, \dots, p$) тоже в убывающем порядке, т.е. $a_1 = 3p + 1$, $a_2 = 3p - 1$, $a_3 = 3p - 2$ и так далее. Здесь даже не так-то просто сказать, чему будет равно a_p , но нам это и не надо. Наконец, для каждого $i = 1, 2, \dots, p$ вычислим $c_i = a_i - b_i$. Весьма странно и удивительно, но при этом все c_i оказываются лежащими в тех же пределах (от 1 до $3p + 1$), а главное — ни одно из них *не совпадает* ни с каким другим числом из какой-либо тройки. Утверждение выглядит довольно смело, но мы его все-таки докажем. Во-первых, $c_1 = a_1 - b_1 = (3p + 1) - 3p = 1$. Далее, заметим, что каждое a_{i+1} меньше a_i на 1 или на 2 (в зависимости от того, находилось ли между ними число, делящее на 3). Во всяком случае, верно неравенство: $a_{i+1} \geq a_i - 2$. Кроме того, $b_{i+1} = b_i - 3$. Поэтому $c_{i+1} = a_{i+1} - b_{i+1} \geq (a_i - 2) - (b_i - 3) = (a_i - b_i) + 1 = c_i + 1$. Таким образом, последовательность c_i ($i = 1, 2, \dots, p$) — строго возрастающая. Поэтому, во-первых, никакие два ее члена не совпадают между собой, а во-вторых, все c_i не меньше $c_1 = 1$. Далее, $c_p = a_p - b_p = a_p - 3$, т.е. наибольшее из всех c_i строго меньше наименьшего из всех a_i . Поэтому не может быть и речи о совпадении какого-либо c_i с каким-либо a_i . И, конечно, так как $c_p < a_p < a_1 = 3p + 1$, то все c_i благополучно принадлежат отрезку $[1; 3p + 1]$. Однако, надо еще доказать, что никакое c_i не может совпасть ни с каким b_i . Это можно сделать из анализа делимости на 3. В самом деле, все b_i делятся на 3, но все a_i не делятся на 3, поэтому разности между ними (т.е. c_i) тоже не делятся на 3. Поэтому никакое c_i не может совпасть ни с каким b_i .

Последний вопрос: а как насчет «отброшенного» числа a_0 ? Мы не можем его «с ходу» назвать, но оно есть! В самом деле, после того, как мы, соблюдая условие, из чисел от 1 до $3p + 1$ укомплектовали p троек (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , ..., (a_p, b_p, c_p) , то одно число *непрерывно* останется – это и будет a_0 .

Для наглядности приведем пример для $p = 4$, т.е. для чисел от 1 до $3 \cdot 4 + 1 = 13$. Выделив из них 4 числа, делящихся на 3 (т.е. 12, 9, 6 и 3), а также 4 наибольших числа среди остальных (т.е. 13, 11, 10 и 8), получим искомую комплектацию чисел в 4-х тройках: (13, 12, 1), (11, 9, 2), (10, 6, 4) и (8, 3, 5). «Незадействованным» осталось число 7.

Лемма доказана. На ее основе моментально доказывается другая лемма:

Лемма 2. Пусть даны $6p + 3$ целых чисел от $-(3p + 1)$ до $3p + 1$. Тогда эти числа можно разбить на $2p + 1$ нуль-троек.

Доказательство. В соответствии с леммой 1, числа от 1 до $3p + 1$ можно разбить на p троек (a_1, b_1, c_1) , (a_2, b_2, c_2) , ..., ..., (a_p, b_p, c_p) такие, что $a_i = b_i + c_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, p$ (и еще останется «лишнее» число a_0).

Рассмотрим тройку (a_1, b_1, c_1) . Она (мы об этом уже говорили) «порождает» сразу две нуль-тройки: $(a_1, -b_1, -c_1)$ и $(-a_1, b_1, c_1)$. То же можно сказать и об остальных тройках, и, таким образом, получаем $2p$ нуль-троек. Добавив к ним еще одну тройку, основанную на «лишнем» числе, получаем нуль-тройку $(a_0, -a_0, 0)$. Нетрудно видеть, что в нуль-тройках задействованы по одному разу все целые числа от $-(3p + 1)$ до $3p + 1$.

Для наглядности – пример для уже знакомого $p = 4$, т.е. для чисел от -13 до 13. Используя приведенные выше 4 тройки, получим необходимые $2 \cdot 4 + 1 = 9$ нуль-троек: (13, -12 , -1), (-13 , 12, 1), (11, -9 , -2), (-11 , 9, 2), (10, -6 , -4), (-10 , 6, 4), (8, -3 , -5), (-8 , 3, 5) и (7, -7 , 0).

И эта лемма доказана.

Что же получается? Даже для самого «неприятного» случая $n = 3$ искомая разбивка на группы *существует*. Теперь уже почти нет сомнений, что для $n > 3$ задача тем более разрешима. И более того – так как при вычитании числа 3 из любого нечетного числа мы получим четное число, то решить задачу для произвольного нечетного $n > 3$ становится совсем несложно!

Начнем. Если n и m нечетные, то $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$ (p, q – натуральные), и мы имеем дело с натуральными числами от 1 до $(2p + 1)(2q + 1) = 4pq + 2p + 2q + 1$ включительно. Аналогично тому, как это делалось для $n = 3$, от всех чисел

отнимем $2pq + p + q + 1$. Получится набор последовательных целых чисел от $-(2pq + p + q)$ до $2pq + p + q$ включительно (та же симметрия относительно нуля!), которые мы и попытаемся разбить на группы в соответствии с требованиями условия.

Далее, так как для натуральных p и q справедливо неравенство $2pq + p + q \geq 2p \cdot 1 + p + 1 = 3p + 1$, то весь отрезок целых чисел от $-(3p + 1)$ до $3p + 1$ лежит целиком внутри отрезка чисел от $-(2pq + p + q)$ до $2pq + p + q$. Поэтому мы можем «выбрать» этот «внутренний» отрезок и, согласно лемме 2, разобьем его на $m = 2p + 1$ нуль-троек. Рассмотрим оставшиеся числа (лежащие «левее» и «правее» внутреннего отрезка). Очевидно, они образуют два отрезка, содержащие по $(2pq + p + q) - (3p + 1) = (2p + 1)(q - 1)$ чисел (в одном отрезке – положительные числа, в другом – отрицательные), причем каждому числу из одного отрезка соответствует равное ему по абсолютной величине, но противоположное по знаку число из другого отрезка. Следовательно, все числа из обоих отрезков можно объединить в $(2p + 1)(q - 1)$ пар так, что в каждой паре сумма чисел равна 0. Назовем такие пары *нуль-парами*.

А теперь образуем $2p + 1$ групп чисел, добавив произвольным образом к каждой из $2p + 1$ образованных выше нуль-троек по $q - 1$ нуль-пар. Тем самым мы «израсходуем» все нуль-пары, зато в каждой группе стало $3 + 2(q - 1) = 2q + 1 = n$ чисел – что и требовалось, причем, очевидно, сумма всех чисел в каждой группе равна 0 (ибо составлена из одной нуль-тройки и нескольких нуль-пар).

Последний штрих (не обязательный, но для порядка): к каждому числу прибавим отнятое в самом начале $2pq + p + q + 1$. Получим то, что мы хотели: разбивку натуральных чисел от 1 до $(2p + 1)(2q + 1)$ на $m = 2p + 1$ групп по $n = 2q + 1$ чисел с равными суммами.

Итак, ответ для данного варианта: *можно*.

Резюмируем. Обобщив все результаты, получаем окончательный ответ: если n – нечетное, а m – четное, то требуемую разбивку чисел (и, следовательно, игроков) на группы выполнить нельзя, а во всех остальных случаях – можно.

И, как часто бывает, каждая решенная задача порождает несколько нерешенных. Во всяком случае, одну из них мы можем сформулировать. Вернемся еще раз к удивительной и загадочной лемме 1. В ней мы составляли тройки из чисел от 1 до $3p + 1$, отбрасывая одно «лишнее» число. А если взять просто числа от 1 до $3p$, заранее выбросив число $3p + 1$? Можно ли их разбить на p групп по 3 числа аналогично лемме 1?

Здесь сразу можно отбросить кое-какие заведомо бесперспективные значения p . Обратим внимание: если одно число равно сумме двух других, то либо они все четные, либо ровно два из них нечетные. Поэтому в каждой тройке должно содержаться четное количество нечетных чисел (0 или 2), поэтому среди чисел от 1 до $3p$ должно быть четное количество нечетных чисел – иначе мы обречены на неудачу. Отсюда сразу следует, что p должно при делении на 4 давать остаток 0 или 1. Для наименьшего такого $p = 1$ получается единственная тройка, которая удовлетворяет условию: (3, 1, 2). А дальше? Для $p = 4$ и $p = 5$ тоже можно подобрать разбиения на тройки (найдите их сами – это несложно). А дальше – кто его знает...

Ничего не остается, как обратиться за помощью к читателям. Окажите помощь в решении этой задачи, а заодно попробуйте и ее как-нибудь обобщить. И обязательно поделитесь успехами с редакцией!

НЕ СДАВАЙТЕСЬ, МИСТЕР ФЕЙНМАН!

- Я победил в зоологическом конкурсе!
- Как же тебе это удалось?
- Спросили, сколько ног у страуса, и я сказал, что три.
- Но у страуса две ноги!
- Да, но все остальные сказали, что четыре.

Старый анекдот

Знаменитый американский физик Ричард Фейнман помимо своих профессиональных качеств выделялся редкой способностью быстро производить в уме приближенные вычисления с приемлемой точностью. И он это делал не за счет каких-то сверхъестественных способностей, а умелым использованием свойств различных чисел и функций. Примеры таких вычислений приводятся им в автобиографической книге «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!». В частности, там есть такой эпизод:

Как-то у меня было хорошее настроение, и, сам не зная отчего, я вдруг объявил: «Берусь за 60 секунд решить с точностью 10% любую задачу, которую вы сможете сформулировать за 10 секунд».

Был обеденный перерыв. Все наперебой начали придумывать сложные, как им казалось, задачи. Например, найти определенный интеграл от функции вроде $1/(1+x^4)$ (она, как оказалось, почти не менялась в предложенных пределах).

Самое сложное, что они придумали, было найти коэффициент при x^{10} в разложении $(1+x)^{20}$. Я все-таки уложился в минуту. Все шло как нельзя лучше, когда в холл вошел Пол Улам, мой старый знакомый еще по Принстону, который всякий раз оказывался умнее меня. (...)

Так вот, он вошел в холл, и все закричали:

– Привет, Пол! Во Фейнман дает! Мы придумываем ему задачи, а он их все решает за минуту с точностью 10%. Попробуй сам!

Почти не задумываясь, он говорит:

– Тангенс от 10^{100} .

Безнадежно: надо делить на π со ста значащими цифрами. Я сдался.

С великим физиком следует согласиться: произвести в уме деление на π со ста значащими цифрами (тем более за минуту) – дело бесперспективное. А ведь сделать это необходимо! Более того: поскольку тангенс – периодическая функция с периодом π , то после деления надо у частного отбросить целую часть, а то, что осталось, снова умножить на π , чтобы получить человеческое, а не астрономическое значение аргумента, и, наконец, вычислить тангенс этого человеческого значения (здесь уже допускается погрешность 10%, но радостней от такого послабления что-то не становится). Таким образом, Фейнман сдался совершенно обоснованно: никуда не денешься!

Ой ли? Ведь если не знаешь ответа и никак (никак!) не можешь его получить, может быть, имеет смысл, подобно герою вышеприведенного анекдота, этот ответ *угадать*? В самом деле, почему бы не попробовать попасть пальцем в небо с погрешностью 10%?

На первый взгляд такая идея кажется безумной. Тригонометрическая функция, именуемая тангенсом, может принимать все действительные значения. Значит, требуется угадать с погрешностью 10% *произвольное действительное число*! Мыслимо ли это? Даже если ограничиться положительными числами, вероятность такой удачи явно равна нулю: какое бы огромное число мы ни назвали, десятипроцентный интервал в обе стороны от него совершенно незаметен на фоне *бесконечности* справа от этого интервала. Любое сколь угодно большое число, деленное на бесконечность, есть нуль – факт неопровержимый. Что уж тут гадать!

И тем не менее шанс есть! Ведь задача, если присмотреться, сводится к угадыванию не произвольного вещественного числа,

а тангенса некоторого произвольного аргумента, заключенного к тому же в интервале $-\pi/2$ до $\pi/2$ (или, что то же самое, в интервале от 0 до π , но это менее удобно для дальнейших рассуждений). Значения аргумента в интервале распределены равномерно (мы его не можем вычислить, и потому обоснованно полагаем, что он может с равной вероятностью оказаться любым). Но тангенс – функция, изменение которой далеко не равномерно. Как резко он возрастает у границ интервала – малейшее изменение аргумента ведет к огромному скачку функции! Зато вблизи нуля функция практически пропорциональна аргументу.

Так что же нам делать в свете вышеизложенного? Допустим, мы дали ответ: искомый тангенс равен некоторому числу x . Мы окажемся победителями, если оно отличается от истинного значения $x_{\text{ист}}$ не более, чем на 10%, т.е. выполняется неравенство: $0,9 \cdot x_{\text{ист}} \leq x \leq 1,1 \cdot x_{\text{ист}}$, откуда $\frac{x}{1,1} \leq x_{\text{ист}} \leq \frac{x}{0,9}$. Но такое произойдет, если истинное значение аргумента, в свою очередь, лежит между $\arctg \frac{x}{1,1}$ и $\arctg \frac{x}{0,9}$. Ширина интервала, в котором может лежать устраивающее нас значение аргумента, равна

$\Delta(x) = \arctg \frac{x}{0,9} - \arctg \frac{x}{1,1}$. Теперь задача окончательно прояснилась: надо называть такое x , которому соответствует *наибольшее* $\Delta(x)$, ибо в этом случае вероятность того, что истинное значение аргумента попадет в указанный интервал, максимальна!

Но чему равно это x ? Сразу видно, что если x очень близко к нулю, то и оба арктангенса близки к нулю, а разность между ними – тем более. Если же взять очень большое (по абсолютной величине) значение x , то арктангены приблизятся к $\pi/2$ (или к $-\pi/2$), и разность опять же устремится к нулю. Значит, ответ надо искать где-то в промежутках. Поскольку среднее арифметическое между 0 и $\pi/2$ – это $\pi/4$, то резонно назвать в качестве ответа число $\text{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ (или -1).

Такой метод получения ответа действительно выглядит как попадание пальцем в небо: среднее арифметическое вовсе не обязано давать наилучшее значение (максимум вполне может быть смещен к одному из концов интервала), но время-то на размышления ограничено! В нашем (и Фейнмановском) распоряжении лишь минута – много вычислять некогда. Впрочем, для

очистки совести давайте проверим нашу догадку и возьмем несложную производную:

$$\frac{dIII}{dx} = \frac{1}{0,9} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{0,9}\right)^2} - \frac{1}{1,1} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1,1}\right)^2} = \frac{0,2(0,99 - x^2)}{(0,81 + x^2)(1,21 + x^2)},$$

которая, как видно, обращается в нуль при $x \approx 0,995$, что, учитывая смысл поставленной задачи, практически идентично угаданному нами значению ± 1 . Вообще-то равенство производной нулю вовсе не свидетельствует именно о максимуме, так что для надежности надо бы взять и вторую производную, но в данном случае и без того понятно, что первая производная меняет знак при прохождении через найденные точки, и даже *видно, как именно* она это делает.

Итак, заявляя, что тангенс от 10^{100} равен с десятипроцентной погрешностью единице (или, ради экзотики, минус единице), мы, конечно, не гарантируем, что так оно и есть, но любой другой ответ был бы *еще хуже*. Кстати, интересно, а какова вероятность того, что мы все-таки угадали? Для ее вычисления надо, очевидно, поделить $III(1)$ на длину периода тангенса, т.е. на π . Оказывается, можно и это оценить в уме – в духе Фейнмана.

Рассуждаем так: производная функции $\text{arctg}(x)$ равна, как известно, $\frac{1}{1+x^2}$, что при $x = 1$ равно $\frac{1}{2}$. Далее,

$III(1) = \text{arctg} \frac{1}{0,9} - \text{arctg} \frac{1}{1,1}$. При малом изменении аргумента

можно изменение функции считать приближенно равным изменению аргумента, умноженному на производную функции. Производная от арктангенса уже определена – она равна $1/2$, а

изменение аргумента составляет $\frac{1}{0,9} - \frac{1}{1,1} = \frac{1,1 - 0,9}{0,9 \cdot 1,1} =$

$= \frac{0,2}{0,99} \approx 0,2$. Поэтому $III(1) \approx 0,2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$, и окончательно ве-

роятность угадать близка к $\frac{1}{10\pi} = 0,03183\dots$, что расположено между $1/31$ и $1/32$. Конечно, немного, но ведь не нуль! (Точное вычисление дает ответ $0,03215\dots$ – по сути то же самое).

Таким образом, даже из такого безвыходного положения имеется если не выход, то некий просвет в конце туннеля. Один к тридцати двум – вероятность, ох, невелика, хотя все же выше,

чем, например, в классической рулетке. Так что можно удовлетворенно сложить руки – все, что можно выжать из ситуации, мы выжали. А далее пусть рассудит судьба!

Наконец, если кто-то сомневается в том, что тангенс от 10^{100} равен единице, пусть проверит! Видимо этот аргумент – самый сильный в нашу пользу, особенно во времена Фейнмана, когда арифмометр был передовым образцом вычислительной техники даже для физиков мирового масштаба. Надо сказать, что упомянутый Фейнманом Пол Улам заслуживает в связи с этим некоторой претензии. Ведь нет никаких сомнений, что и Фейнман, и его «противники» имели в виду задачи, правильность решения которых может быть проверена в течение разумного времени (скажем, до конца того же обеденного перерыва). Задача же Улама к таковым не относится (по крайней мере, тогда не относилась).

Однако времена с тех пор изменились, и компьютер нынче – не диво. А раз так, то у нас есть реальная возможность произвести прямую проверку. Разумеется, просто поделить 10^{100} на π мы не сможем – никакой компьютер не «ухватит» 100 значащих цифр. Но составить простейшую программку, позволяющую получить нужное количество знаков по одному, сумеет любой школьник, худо-бедно умеющий программировать. Не будем на этом даже останавливаться. Самое трудное здесь – найти где-нибудь в справочниках значение π с необходимой точностью (можно, конечно, и это вычислить, используя какой-нибудь ряд, но зачем повторять давно пройденное другими?). Вот как выглядит значение π , содержащее 104 знака после запятой (этого более чем достаточно для расчетов с необходимой точностью):

3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058

2097494459230781640628620899862803482534211706798214... .

Что ж, составим программу, запустим ее и посмотрим, что получится. А получается следующее. При делении 10^{100} на π целая часть частного нас не интересует, а дробная часть оказалась равна 0,1214..., после умножения которой на π и вычисления тангенса получилось 0,401... К величайшему сожалению, единица отличается от этого значения не на 10, а на все 150 процентов. Один шанс против тридцати двух, увы, не сработал. Но, честно сказать, даже допущенная нами ошибка в два с половиной раза – не так уж много для гадания. Ведь, повторим, вычислить ответ даже приближенно было невозможно!

Слегка модернизировав использованную программу, удалось провести, так сказать, *статистическую проверку* предложенной идеи в целом – применительно к угадыванию тангенса *произвольного* числа. В качестве таковых были использованы 100 чисел типа 10^n , где n принимало все целые значения от 1 до 100 (куда уж произвольней!). Выяснилось, что при $n = 34$ и 92 число 1 отличается от тангенса не более, чем на 10%, а при $n = 23, 27, 53$ и 86 такое же отличие имеет место для числа -1 . Прекрасное подтверждение теории (чего, вообще-то, и следовало ожидать)!

Конечно, при решении данной задачи на первое место выходят не вычислительные, а методологические нюансы, и потому справиться с ней в течение 60 секунд было бы непросто даже такому корифею, как Ричард Фейнман. Это сейчас нам легко рассуждать, во-первых, задним числом, а во-вторых, не ограничивая себя во времени! В связи с вышеизложенным уместно в заключение припомнить еще один старый анекдот – на сей раз не зоологический, а армейский:

– *Чем отличается зампотех от замполита?*

– Зампотех говорит: «Делай, как я», а замполит говорит: «Делай, как я сказал».

Дополнение. Прочитанный в начале этой статьи отрывок был взят из 7-го номера журнала «Квант» за 1989 год. Полностью книга тогда еще не была переведена на русский язык. Наконец, в 2001 году долгожданный момент наступил (спасибо издательству «РХД»). Открываю, читаю то же место... Конечно, сразу видно, что перевод другой. Это, разумеется, неприципиально. Важнее другое – фраза Пола Улама (в новом переводе, кстати, Олама, что тоже неприципиально) звучит здесь так: «Тангенс 10 градусов в сотой степени». Обратите внимание – *градусов!* Вот это как раз принципиально! Неужели в том, первоначальном переводе была ошибка? Уверен, что нет – наоборот, ошибка именно в добавлении слова «градусов». Почему? А потому, что в такой постановке задачи (с градусами) нет *ни малейшей необходимости* делить на π со 100 десятичными знаками. Ну, а с такой задачей Фейнман бы точно справился. Более того – автор этих строк решил пойти по его стопам и вычислить самостоятельно тангенс от 10^{100} градусов (с допустимой погрешностью 10%) в уме, без карандаша, бумаги или калькулятора. И с гордостью скажу – удалось! Конечно, не за минуту (не Фейнман все-таки!), но в три-четыре минуты уло-

жился. Как? Сейчас расскажу. Только учтите, описание заняло гораздо больше времени, чем сами вычисления.

Рассуждения были таковы. Период тангенса – 180° , поэтому сначала надо разделить 10^{100} на 180 с остатком, а потом брать тангенс от этого остатка, т.е., сперва следует разобраться с

дробью $\frac{10^{100}}{180}$. Очевидно, можно сократить на 20 :

$\frac{10^{100}}{180} = \frac{100 \cdot 10^{98}}{20 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 10^{98}}{9}$. Деление на 9 – это гораздо проще,

потому что должен быстро появиться однозначный период. Так

и есть – при делении подряд идут одни пятерки, т.е. $\frac{5 \cdot 10^{98}}{9} =$

$= 55\dots55,55\dots$ Сколько пятерок перед запятой – не имеет значения, потому что целая часть отбрасывается. Зато дробная часть

равна 5 в периоде, или $\frac{5}{9}$. Умножив это на 180 , получаем, что

остаток от деления 10^{100} на 180 равен 100 . Итак,

$\text{tg}(10^{100})^\circ = \text{tg}100^\circ = -\text{ctg}10^\circ$ (по формулам приведения). Итак,

задача свелась к оценке котангенса 10 градусов. К сожалению, с ходу, «в лоб», определить его не удастся: ближайшее известное

значение $\text{ctg}30^\circ = \sqrt{3}$, а $\text{ctg}0$ вообще не определен (бесконечно велик). Так что опереться здесь не на что. Но зато можно

использовать равенство $\text{ctg}10^\circ = \frac{1}{\text{tg}10^\circ}$. Действительно, $\text{tg}10^\circ$

найти куда проще, потому что такой угол вполне можно считать

малым, т.е. его тангенс почти равен самому углу, правда,

выраженному в радианах. Таким образом, осталось перевести

10° в радианы. Как это сделать – известно: надо умножить на

$\frac{\pi}{180}$, и получим $\text{tg}10^\circ \approx 10 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$. Поэтому $\text{ctg}10^\circ =$

$= \text{ctg}10^\circ \approx \frac{1}{\text{tg}10^\circ} \approx \frac{18}{\pi}$.

До сих пор, полагаю, и Фейнман шел бы по той же дорожке.

Но дальнейшие его действия предугадать не берусь. Скорее

всего, он помнил значение $\frac{1}{\pi}$, и ему осталось просто перемно-

жить пару чисел, но я-то не помнил (а вообще-то помнить не

мешает: это $0,3183$ – вдруг да пригодится)! Пришлось искать

другой путь, и он оказался тоже неплох. Не могу сейчас сказать,

почему, но возникло непреодолимое желание поделить числитель и знаменатель на 3. Числитель 18 поделится легко, а $\pi/3$ – это примерно 1,05. Поэтому $\frac{18}{\pi} \approx \frac{6}{1,05}$. Делить на 1,05 в уме – удовольствие тоже небольшое, но можно заменить его *умножением*, используя популярную формулу $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$, справедливую для малых x . Поэтому $\frac{1}{1,05} \approx 0,95$, так что $\frac{6}{1,05} \approx 6 \cdot 0,95 = 5,7$. Готово: $\text{tg}(10^{100})^\circ \approx -5,7$. Осталось последнее: молиться, чтобы ошибка не превысила допустимые 10%. Что ж, проверим на калькуляторе: $\text{ctg } 10^\circ = \text{tg } 80^\circ = 5,67\dots$ Вот это да! Погрешность составляет лишь около *полпроцента*. Чем не повод для гордости? Хотя, повторим, именно эта легкость получения ответа, да притом с высокой точностью, свидетельствует о том, что слово «градусов» Пол Улам все-таки не произносил...

ТРОЙНОЕ ДНО ТРОЙНОЙ ДУЭЛИ

Не верю!

К.С. Станиславский

Замечательный популяризатор математики Мартин Гарднер, автор множества великолепных книг, в одной из них¹ рассматривает следующую удивительную задачу:

Смит, Браун и Джонс, решив внести в дуэль на пистолетах некоторое разнообразие, условились провести поединок по несколько измененным правилам. Вытащив жребий и узнав, кому из них выпало стрелять первым, кому – вторым и кому – третьим, они разошлись по своим местам, встав в вершинах равностороннего треугольника. Договорились, что каждый по очереди производит лишь один выстрел и может целиться в кого угодно. Дуэль продолжается до тех пор, пока не будут убиты любые два ее участника. Очередность стрельбы определяется только результатами жеребьевки и остается неизменной в течение всего поединка.

Все три участника знают своих противников. Смит никогда не промахивается. Браун попадает в цель в 80% случаев, а

¹ «Математические головоломки и развлечения», М., «Мир», 1971, глава 20, задача 9.

Джонс, стреляющий хуже всех, промахивается так же часто, как и попадает в цель.

Кто из дуэлянтов имеет более высокий шанс уцелеть, если считать, что все трое придерживаются оптимальных стратегий, и никто из них не будет убит шальной пулей, предназначенной другому? Более трудный вопрос: чему равна вероятность остаться в живых для каждого из дуэлянтов?

На первый взгляд, ничего особо удивительного в задаче нет – обычное упражнение по теории вероятностей (недоумение может вызвать разве что согласие Брауна и Джонса стреляться со Смитом, который никогда не промахивается – если они не самоубийцы, то лучше подкараулить его где-нибудь и расправиться другим способом). И тем не менее, первое впечатление обманчиво – задача имеет двойное дно, которое чуть ли не ставит все с ног на голову. Не зря сам Гарднер упоминает, что задача оказалась настолько интересной и неожиданной, что многие авторы охотно включают ее в сборники занимательных задач² (разумеется, с другими числовыми значениями, но идея та же).

В чем же это двойное дно? Чтобы до него добраться, сначала выполним «честное» решение задачи (в основном, следуя по стопам Гарднера, но в «вольном» изложении – так будет удобней в дальнейшем). Обозначим дуэлянтов по первым буквам их имен: С, Б и Д. Вероятности выжить для каждого из них, как водится, обозначаем буквой p , после которой в скобках указываем условия – для кого из дуэлянтов подсчитывается вероятность, и при какой очередности стрельбы. Например, $p(C \setminus BCD)$ – вероятность остаться в живых для Смита, если первым должен стрелять Браун, вторым – Смит, третьим – Джонс.

Что касается *оптимальной* стратегии, о которой шла речь в условии, то она очевидна: каждый дуэлянт, когда подойдет очередь, должен стрелять в более сильного противника.

Решение удобней начинать именно с того момента, как один из троих выбыл из дуэли по понятным причинам (в связи с отправлением в мир иной). Ясно, что двум оставшимся нет иного выхода, кроме как палить друг в друга до первого попадания, причем исход существенно зависит от того, кто стреляет первым.

² см., например, И. Шарыгин. «Математический винегрет», М., «Орион», 1991, задача 2, или Ф. Мостеллер. «Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями», М., Физматлит, 1975, задача 20.

Пусть, например, осталась пара Браун-Смит, причем первым стреляет Браун. Тогда он убьет Смита с вероятностью $4/5$ (это и есть, очевидно, упомянутые в условии 80%). Если же он промахнется (вероятность чего $1 - 4/5 = 1/5$), то будет наверняка убит ответным выстрелом (Смит-то попадает всегда!). Поэтому:

$$p(B \setminus BC) = 4/5; p(C \setminus BC) = 1/5.$$

Если же осталась пара СБ (т.е. те же двое, но первым стреляет Смит), то здесь, как легко видеть, все гораздо проще:

$$p(B \setminus CB) = 0; p(C \setminus CB) = 1.$$

Ничуть не сложнее случаи СД и ДС:

$$p(D \setminus CD) = 0; p(C \setminus CD) = 1;$$

$$p(D \setminus DC) = 1/2; p(C \setminus DC) = 1/2.$$

А как быть с очередностями БД и ДБ? Ни Джонс, ни Браун не обладают абсолютной меткостью, и каждый теоретически может промахиваться бесконечное количество раз. Гарднер здесь рассматривает бесконечное «дерево» вариантов, отбирая затем ветви, ведущие к победе одного или другого стрелка. Читатель может убедиться, что задача сводится к суммированию бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Конечно, можно и так, но... нельзя ли обойтись без этих бесконечностей? Оказывается, можно! А как именно – пусть читатель сам сообразит.

Упражнение 1. *Сообразите! И найдите искомые вероятности.*

Надеемся, ответы читателя совпали с нашими:

$$p(B \setminus BD) = 8/9; p(D \setminus BD) = 1/9;$$

$$p(B \setminus DB) = 4/9; p(D \setminus DB) = 5/9.$$

Но все это была как бы прелюдия, а теперь начнем собственно решение. Очевидно, слепой жребий с равной вероятностью может назначить одну из шести очередностей стрельбы для всех троих: СБД, СДБ, БСД, БДС, ДБС, ДСБ. Каждую из них, хочешь не хочешь, придется проанализировать. Имеет смысл начать с того, что попроще – где право начинать досталось Смицу. Он-то не промахнется, и число участников дуэли сразу же заметно сократится (на треть).

Итак, пусть имеет место очередность СБД. После первого выстрела Смита (и вытекающей отсюда гибели Брауна, как

более сильного противника) мы приходим к рассмотренной выше очередности ДС. Дальнейшее понятно:

$$p(C \setminus СБД) = p(C \setminus ДС) = 1/2;$$

$$p(D \setminus СБД) = p(D \setminus ДС) = 1/2;$$

и, конечно, $p(B \setminus СБД) = 0$ (не везет, так не везет!)

Для очередности СДБ будет... совершенно то же самое: опять после первого выстрела Смита Браун погибает, и мы имеем очередность ДС. Итак:

$$p(C \setminus СДБ) = p(C \setminus ДС) = 1/2;$$

$$p(D \setminus СДБ) = p(D \setminus ДС) = 1/2; p(B \setminus СДБ) = 0.$$

Упражнение 2. Найдите вероятности остаться в живых для каждого из дуэлянтов при нерассмотренных нами четырех очередностях стрельбы.

Для наглядности полученные нами и читателями вероятности сведем в таблицу:

Вероятность выжить для:	Очередность стрельбы					
	СБД	СДБ	БСД	ДБС	ДСБ	БДС
Смита	1/2	1/2	1/10	1/20	1/4	1/20
Брауна	0	0	16/45	28/45	4/9	4/9
Джонса	1/2	1/2	49/90	59/180	11/36	91/180

Осталось просуммировать вероятности для каждого дуэлянта и поделить получившиеся суммы на 6 (ибо вероятность каждой очередности сама по себе равна 1/6). В результате получим следующие вероятности выжить для Смита, Брауна и Джонса:

$$p(C) = 29/120 = 0,241\dots,$$

$$p(B) = 14/45 = 0,311\dots,$$

$$p(D) = 161/360 = 0,447\dots$$

Ну и ну! Наивысшая вероятность выйти целым из этой передряги оказывается у Джонса (наихудшего стрелка), а наименьшая – у Смита (наилучшего стрелка!). Как же так?

Между тем, так и должно быть, ведь в соответствии с оптимальной стратегией дуэлянтов чаще всего выстрелы направлены именно на Смита, а после него – на Брауна. Джонса же поначалу вообще никто не принимает во внимание, вплоть до решающего момента.

Тем не менее результат удивляет (это еще мягко сказано). Но сейчас читателю предстоит удивиться еще больше (и, пожалуй, именно в этом причина популярности данной задачи среди составителей сборников). Оказывается у Джонса имеется *еще более оптимальная* стратегия, при которой его шансы выжить становятся намного больше (хотя куда уж больше-то!). Обратим внимание на очередности ДБС и БСД. В первой из них Джонс стреляет первым, во второй – последним. Казалось бы право первого выстрела – это прекрасно. Но... вероятность для Джонса выжить при очередности БСД чуть ли не вдвое выше, чем при ДБС! То же выясняется при сравнительном анализе очередностей ДСБ и БСД. Нетрудно объяснить, почему (задним числом всегда легче объяснять). Здесь возникает ситуация, напоминающая игру втроем в подкидного дурака (вряд ли найдется читатель, который хоть раз не участвовал в такой игре). Если ходишь под кого-то и «засыпаешь» его, то в результате получаешь ход под себя со стороны третьего игрока. Так и в нашей дуэли: если Джонс, стреляя первым, убивает Смита, то сразу попадает под обстрел Брауна, который тоже отличается хорошей меткостью. Промахнуться выгоднее! В этой идее и заключается, по Гарднеру, *второе дно* задачи. Если Джонсу выпало несчастье (!) стрелять первым, то он легко может переместиться в конец очереди, выстрелив в воздух! Этим он сведет не очень-то выгодные для себя очередности ДБС или ДСБ к значительно более благоприятным БСД или СБД соответственно. Короче говоря, оптимальная стратегия Джонса такова: когда подходит очередь, стрелять в воздух, пока оба его противника живы и обмениваются любезностями в виде летящих пуль. И как только один из них погибнет (чего долго ждать не придется), то среди двоих оставшихся за Джонсом окажется право первого выстрела, что обеспечивает ему вероятность выжить заведомо не меньше $1/2$ (ибо он попадает в цель так же часто, как и промахивается).

А как определить вероятности? С очередностями СБД, СДБ и БСД (когда Смит стреляет раньше Джонса) один из противников Джонса будет убит еще до того, как Джонс вступит в дело. Поэтому здесь все вычисленные нами вероятности остаются прежними. Очередности ДБС и ДСБ Джонс, как уже отмечалось, переводит в БСД или СБД с вероятностями, которые тоже нам известны. Осталось проанализировать БДС. Не попросить ли читателя об этой маленькой услуге?

Упражнение 3. *Определите вероятности, сообразуясь с новой стратегией Джонса.*

В результате наша таблица заметно преобразилась:

Вероятность выжить для:	Очередность стрельбы					
	СБД	СДБ	БСД	ДБС	ДСБ	БДС
Смита	1/2	1/2	1/10	1/10	1/2	1/10
Брауна	0	0	16/45	16/45	0	16/45
Джонса	1/2	1/2	49/90	49/90	1/2	49/90

Итоговые вероятности уцелеть тоже весьма изменились:

$$p(C) = 3/10 = 0,3,$$

$$p(B) = 8/45 = 0,177\dots,$$

$$p(D) = 47/90 = 0,522\dots$$

Это решение и считает окончательным Гарднер (а также авторы других сборников). Как видим, вероятность благополучного исхода для Брауна снижается почти вдвое, Смит слегка поправляет свои дела, Джонс же может почти торжествовать! Вот что такое *продуманная оптимальная стратегия!*

Ну как – впечатляет? Еще бы! И тем не менее, позвольте вслед за великим режиссером (см. выше) воскликнуть: «Не верю!». Вот именно – не верю, и все тут! Что это, извините, за *оптимальность* такая, при которой суммарная вероятность выжить для двух лучших стрелков ниже, чем для одного самого плохого? Формулы формулами, но если душа не принимает – как быть?

Ответ один: думать и осмысливать, пока либо душа не примет, либо... не засверкают новые грани. И ведь засверкали! Действительно, с какой стати оптимальная стратегия для Смита и Брауна – перестреливаться между собой, пока один из них не погибнет, а второй не попадет на мушку Джонса? Чтобы сделать ситуацию максимально наглядной, рассмотрим «критический» вариант: пусть *все* дуэлянты обладают *абсолютной* меткостью (т.е. стреляют без промаха). Что делать начинающему? Лишь только он убьет кого-то из остальных, как немедленно погибнет от руки третьего. Следовательно, он просто *вынужден* стрелять в воздух, а вслед за ним то же придется делать и другим. Менее весомыми, но, в принципе, такими же должны быть аргументы, если соперники не обладают абсолютной меткостью, но стреляют одинаково хорошо (скажем, поражают цель в 80-90% случаев).

В нашем случае дуэлянты неодинаково искусны в стрельбе,

поэтому эффект от такого пацифизма, наверное, будет ослаблен. Но сама идея требует проверки. Итак, по условию, дуэлянты прекрасно знают своих противников, поэтому каждый может до тонкостей воспроизвести ход мыслей остальных, в том числе и их оптимальные стратегии. В частности, и Смит, и Браун отлично знают, что Джонс будет стрелять только в воздух, пока все трое живы. В чем цель каждого дуэлянта – тоже понятно: обеспечить себе максимальные шансы выжить. Основываясь на этом, «сконструируем» рассуждения Брауна, если, допустим, выпала очередность стрельбы БДС:

«В кого стрелять? Если я убью Джонса, меня сразу же прикончит Смит. Если убью Смита, мы станем до победного конца перестреливаться с Джонсом, причем его шансы будут выше, так как он стреляет первым. Ну, а если я выстрелю в воздух – что это даст? Вслед за мной выстрелит в воздух и Джонс. И что тогда подумает по этому поводу Смит? У него три возможности: либо убить меня и попасть под обстрел Джонса, либо убить Джонса и попасть под мой обстрел, либо... тоже выстрелить в воздух! Что он предпочтет? Убивая меня, он получает шанс выжить с вероятностью $1/2$, убивая Джонса – с вероятностью $1/5$. Стреляя же в воздух, он возвращает все на круги своя, и далее мы снова все стреляем в воздух, и так далее. В этом случае вероятность выжить для него (как и для нас с Джонсом) повышается до *единицы*. Ура! Итак, если я выстрелю в воздух, то за мной это же сделает Джонс, и самое выгодное для Смита – повторить наши действия».

Вот оно – *третье дно*, которое снова многое меняет! Действительно, в предыдущем решении почему-то был выделен только Джонс, которому до появления первой жертвы самое выгодное – никого не убивать. Но остальные-то чем хуже? Та же стратегия выгодна и Смицу, и Брауну.

Как говорится, худой мир лучше доброй ссоры. Чтобы лишний раз это прочувствовать, читатель может смоделировать рассуждения каждого дуэлянта при остальных очередностях. Результат будет тот же, и мрачная поначалу история завершается счастливым финалом: смертность снижается с 66,7% до нуля. Такое можно только приветствовать.

Итак, задача исчерпана до дна, но... есть опасения, что и оно не последнее. Как кто-то остроумно выразился, «спутившись на самое дно, мы услышали, как снизу стучат». Похоже, и здесь имеет место нечто подобное. Ведь получается странная ситуация: если все дуэлянты будут на радостях палить только в воздух, то никогда не будет выполнено требование о том, что дуэль продол-

жается до гибели двух ее участников. Оптимальные стратегии противоречат условиям дуэли! Парадокс!

И, кажется, ясно, в чем дело. Заглянув обратно во второе дно, мы можем заметить, что Джонс, стреляя в воздух, вообще-то *нарушает* правила дуэли. Пока он был один такой хитрый, все было с виду гладко, но когда за ним потянулись остальные, последствия вылезли наружу. По-видимому, надо было в условии четко оговорить, что каждый дуэлянт *непременно* должен стрелять *в одного из противников* (но не в воздух!). И тогда правильный ответ дает отброшенное раньше всех первое дно.

А если все-таки допустить стрельбу в воздух, то появляется еще один солидный подводный камень: количество патронов не может быть неограниченным. Опять же для наглядности возьмем «критический» случай: пусть у всех ровно по одному патрону, и выпала очередность стрельбы, скажем, ДСБ. Джон, как мы знаем, стреляет в воздух, не раздумывая, а что после этого делать Смиту? Если он тоже выстрелит в воздух, то очередь перейдет к Брауну, который может совершенно безнаказанно выстрелить в любого из своих безоружных противников. Поэтому Смит, скорее всего, предпочтет не рисковать и на всякий случай застрелит Брауна, обезопасив себя, а заодно и Джонса. Дуэль вновь приобрела кровавый оттенок.

Еще агрессивней смотрится конфликт при очередности ДБС. Здесь даже вечно миролюбивому Джонсу, возможно, придется сразу стрелять в Смита. В самом деле, а вдруг стреляющий вторым Браун не попадет в Смита, и тот потом отправит Джонса (хотя не обязательно его) на тот свет? Исходя из этого, Джонсу надо бы постараться помочь Брауну. Но где гарантия, что Браун не оплатит Джонсу черной неблагодарностью и не попытается спровадить его вслед за Смитом? Как видно, мотивация решения для Джонса запуталась донельзя, и, похоже, при разработке оптимальной стратегии не обойтись без *количественной оценки* степени ненависти, питаемой дуэлянтами друг к другу.

А если они имеют не по одному, а по 2-3 патрона? Тогда потребуются столь многозначная и запутанная логика, что вряд ли можно придумать что-либо разумное без риска попасть к психиатру. Не исключена возможность, что перед началом дуэли первый же участник погрузится в многочасовые рассуждения на тему «куда стрелять?» и, не выдержав напряжения, пустит себе пулю в лоб.

Наконец, и к «обычной» дуэли с двумя участниками тоже можно приспособить наши рассуждения: стрелять в воздух выгоднее, чем пытаться убить противника. Но практика, увы,

показывает, что здесь люди о выгоде не думают. Неспроста такие дуэли в прошлые века приносили немало жертв, в том числе и среди математиков (печальный пример – Эварист Галуа). Еще один парадокс? Что-то много их развелось... А ведь задача казалась такой простой!

Решения упражнений

Упражнение 1. Ясно, что $p(B \setminus BD) + p(D \setminus BD) = 1$ и $p(B \setminus DB) + p(D \setminus DB) = 1$, поскольку в живых остается ровно один из двоих. Рассмотрим очередность БД. Браун убивает Джонса первым же выстрелом с вероятностью $4/5$. Если же он промахнется (с вероятностью $1/5$), то «становится в конец очереди», т.е. возникает очередность ДБ, при которой вероятность Брауна выжить равна $p(B \setminus DB)$. Следовательно:

$$p(B \setminus BD) = 4/5 + (1/5) \cdot p(B \setminus DB).$$

Аналогично можно записать:

$$p(D \setminus DB) = 1/2 + (1/2) \cdot p(D \setminus BD).$$

Итого имеем четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Система эта легко решается, и ответ таков:

$$p(B \setminus BD) = 8/9; \quad p(D \setminus BD) = 1/9;$$

$$p(B \setminus DB) = 4/9; \quad p(D \setminus DB) = 5/9.$$

Упражнение 2. Рассмотрим сначала очередность БСД. Здесь Браун стреляет в Смита и с вероятностью $4/5$ попадает, создавая тем самым очередность ДБ, либо же с вероятностью $1/5$ промахивается, создавая рассмотренную выше очередность СДБ. Поэтому:

$$p(C \setminus БСД) = (1/5) \cdot p(C \setminus СДБ) = 1/10,$$

$$p(B \setminus БСД) = (4/5) \cdot p(B \setminus ДБ) + (1/5) \cdot p(B \setminus СДБ) = \\ = 16/45,$$

$$p(D \setminus БСД) = (4/5) \cdot p(D \setminus ДБ) + (1/5) \cdot p(D \setminus СДБ) = \\ = 49/90.$$

Таким же способом, опираясь на уже известные результаты, можно найти вероятности и для остальных очередностей.

Упражнение 3. При очередности БДС Браун либо убивает Смита с вероятностью $4/5$, создавая тем самым очередность ДБ, либо с вероятностью $1/5$ промахивается, создавая очередность

ДСБ, которую Джонс, стреляя в воздух, преобразует в СБД. Следовательно:

$$p(C \setminus БДС) = (1/5) \cdot p(C \setminus СБД) = 1/10,$$

$$p(B \setminus БДС) = (4/5) \cdot p(B \setminus ДБ) + (1/5) \cdot p(B \setminus СБД) = \\ = 16/45,$$

$$p(D \setminus БДС) = (4/5) \cdot p(D \setminus ДБ) + (1/5) \cdot p(D \setminus СБД) = \\ = 49/90.$$

Как и следовало ожидать, вероятности совпали с полученными при решении упражнения 2.

ЕЩЕ ПАРАДОКСАЛЬНЕЙ!

Множество математических бриллиантов создал великий Леонард Эйлер, когда в XVIII веке жил и работал в столице Российской Империи – Санкт-Петербурге. Один из них он так и назвал в честь своего тогдашнего местонахождения. Речь идет о знаменитом Санкт-Петербургском парадоксе.

Заключается он в следующем. Некий игорный дом предлагает посетителям сыграть в такую игру. Сначала участник игры платит вступительный взнос, а затем подбрасывает монету, пока впервые не выпадет орел (еще раз обратите внимание: монета подбрасывается до *первого* выпадения орла). Если орел выпал сразу же, игрок получает 1 рубль в качестве выигрыша и уходит – игра окончена. Если орел выпал при втором броске, то выигрыш составит 2 рубля, если при третьем – 4 рубля и так далее, с постоянным возрастанием суммы выигрыша вдвое. Таким образом, чем позже выпадет орел, тем выгодней игроку.

Спрашивается: какую сумму должен запрашивать в качестве вступительного взноса игорный дом, чтобы не остаться в убытке? Для этого, разумеется, надо определить так называемое *математическое ожидание* выигрыша, т.е. величину среднего выигрыша игрока при достаточно большом (в идеале – бесконечно большом) числе игр. Оказывается, это математическое ожидание *бесконечно велико*, ибо является суммой расходящегося ряда. Действительно, вероятность выпадения орла с первой попытки – $1/2$ (математическое ожидание выигрыша – $1 \cdot 1/2 = 1/2$ рубля), вероятность выпадения орла со второй попытки – $1/4$ (математическое ожидание – $2 \cdot 1/4 = 1/2$ рубля, т.е. такое же), и так далее. Для каждого случая выигрыш составит

полрубля, а при бесконечно большом числе игр — бесконечно большую сумму.

В этом и заключается Санкт-Петербургский парадокс. «Ну и что же тут парадоксального? — скажет любой нормальный человек. — Мало ли игр на свете...». Но, уважаемый, спросите себя: а какую сумму *Вы сами* были бы готовы заплатить за участие в такой игре, даже зная наверняка, что математическое ожидание Вашего выигрыша бесконечно велико? И здесь-то парадокс проявляет себя во всю мощь: подавляющее большинство (и автор этих строк в том числе) готовы раскошелиться максимум на 10–20 рублей, редко кто согласится отвалить 30–50 рублей, а сотней не рискнет никто! Но *почему*? Или люди не видят явной выгоды (притом бесконечно большой выгоды)? Да, подкузьмил нас Эйлер своим парадоксом...

К чести его будь сказано, великий ученый сам дал разъяснение своей же загадки. Но пока о ней упоминать не будем, а обратим внимание на другое. Более чем через два столетия после Эйлера было обнаружено, что Санкт-Петербургский парадокс можно усилить многократно, сделав его настолько парадоксальной исходного, что просто диву даешься! А именно, подкорректируем правила игры следующим образом. Если орел впервые выпал не позже 1000-го броска, то игрок не получает *ничего*, а просто уходит не солоно хлебавши. И лишь если орел выпал на 1001-м броске, игрок получает 1 рубль, если на 1002-м — 2 рубля, на 1003-м — 4 рубля и так далее. Обратим внимание, что математическое ожидание выигрыша все равно остается бесконечно большим (по сравнению с первоначальным вариантом оно

вместо суммы расходящегося ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ становится равным сумме тоже расходящегося ряда $0 + 0 + \dots + 0 +$

$+ \frac{1}{2^{1001}} + \frac{1}{2^{1001}} + \dots$, где первые 1000 слагаемых — нули, а все

следующие — мизерно малы, ну и что с того? Бесконечность перевесит!). А теперь, положи руку на сердце, скажите, какой вступительный взнос Вы готовы заплатить за такую обновленную игру? Ответ однозначен: если за предыдущую (исходную) версию игры многие готовы отвалить десяток-другой рублей, то за усиленный вариант никто не даст и ломаного гроша!

Но почему? Математическое ожидание-то по-прежнему бесконечно велико! Или просто люди в силу своей ограниченности не в состоянии осознать, что такое *бесконечность*? Тогда стыд и срам нам, царям природы! (Впрочем, несмотря на весь пафос,

автор все равно не дал бы ни копейки за право сыграть в новый вариант игры).

Ну, хватит загадок, примемся за разгадки. Конечно, люди способны заблуждаться во многом, что касается больших чисел (вспомните знаменитые пшеничные зерна на шахматной доске!). Но в данном случае человеческая интуиция оказывается все-таки на высоте, ибо разгадка Санкт-Петербургского парадокса (как в классическом, так и в усиленном варианте) формулируется просто и коротко: *бесконечно больших выигрышей не бывает*.

Во-первых, никто не в состоянии сыграть *бесконечно много* игр. Если считать, что игрок физически не сможет подбросить монету более 100 000 раз за игру, то математическое ожидание становится равным 50 000 рублей. Правда, взнос такого порядка за право поиграть тоже вряд ли кто сделает! Зато если с этой позиции рассмотреть усиленный вариант парадокса, то ожидания равно $49000/2^{1000} < 10^{-96}$, что не заслуживает внимания ни одного разумного человека.

Но можно посмотреть на ситуацию иначе. Никакой игорный дом не способен уплатить *сколь угодно большой* суммы выигрыша. Т.е., начиная с некоторого момента, выигрыш удачливого игрока составит лишь стоимость, скажем, всего имущества владельцев игорного дома — больше они просто *не в состоянии* ему дать. И потому математическое ожидание выигрыша становится вполне конечной и реальной суммой. Пусть, например, стоимость всего имущества (максимальная возможная сумма выигрыша) составляет 10 000 000 рублей. Нетрудно подсчитать, что если орел впервые выпадает на 24-м броске, то выигрыш составит $2^{23} = 8\,388\,608$ рублей, а если на 25-м или позже, то игроку достанется 10 000 000 рублей. Поэтому математическое ожидание выигрыша составит по полрубля на первые 23 броска, $10\,000\,000/2^{25}$ рублей на выпадение орла с 24-го раза, $10\,000\,000/2^{26}$ рублей на 25-й бросок и так далее. Нетрудно посчитать, что это около 12,6 рублей. Это существенно (ох как существенно!) меньше, чем бесконечность или хотя бы 50 000 рублей.

Что же касается варианта игры, соответствующего усиленному парадоксу, то здесь математическое ожидание будет этак в 2^{1000} раз меньше, что невозможно разглядеть даже в микроскоп. Поэтому и желающих заплатить какой-либо вступительный взнос, мягко говоря, немного. Ларчик, как видим, открывается просто. Но парадокс-то хорош, верно?

ДОЖДЬ, ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ И ПРОГРАММИСТЫ

КАК УБЕГАТЬ ОТ ДОЖДЯ?

Введение

Представьте себе, что вы идете по улице в пасмурную погоду, не имея при себе ни зонтика, ни плаща, ни накидки... Вдруг неожиданно-негаданно на вас обрушивается сильнейший ливень да еще и с ветром.

Что делать?

подавляющее большинство людей (и автор в том числе) ответит так: немедленно бежать под ближайшее укрытие, и чем быстрее, тем лучше. Истина, казалось бы, неоспоримая. Однако встречаются люди, рассуждающие и так: «Безусловно, надо направиться под укрытие. Но вот бежать при этом как можно быстрее не имеет смысла: если я быстро бегу, я, конечно, меньше времени нахожусь под дождем, и, следовательно, на меня упадет меньше капель сверху. Но зато я собью своим телом больше тех капель, которые находятся передо мной. Я меньше намокну *сверху*, но больше намокну *спереди*. Так какая мне выгода от быстрого бега? Никакой!» И такие люди спокойно идут под проливным дождем, невзирая на удивление окружающих.

Как же трактовать такое рассуждение? Как заблуждение? Пожалуй. Но... вдруг это не заблуждение, а, наоборот, интуиция, и люди, рассуждающие таким образом, правы?

Вот соображение в их пользу. Представьте себе, что ветер дует в направлении от вас к укрытию и настолько силен, что дождь практически горизонтален. Тогда лучше всего убежать от дождя именно со скоростью ветра: все капли будут двигаться параллельно вам, и ни одна на вас не упадет. Невыгодно двигаться медленнее, но невыгодно двигаться и быстрее: вы намокнете больше! Конечно, не так-то просто нестись со скоростью сильного ветра (даже попутного!), но такой «мысленный эксперимент» побуждает вникнуть в задачу.

§1. Постановка задачи и необходимые упрощения

Итак, сформулируем условие задачи:

На улице стоит человек. Внезапно начинается дождь. Человек направляется к ближайшему укрытию, находящемуся на расстоянии l от него. С какой скоростью он должен передвигаться, чтобы намочнуть как можно меньше?

Задача поставлена, но в таком виде нам ее, пожалуй, не решить. Действительно, человек – существо сложное по форме, а при движении он к тому же непрерывно свою форму изменяет (переставляет ноги, размахивает руками...). Так что совершить точный расчет – задача невероятно трудная. Иное дело – оценка, приближенное решение, которое нам вполне по силам. В связи с этим переформулируем задачу:

Прямоугольный параллелепипед, площади граней которого равны S_6, S_8 и S_4 (от слов «боковая», «верхняя» и «лицевая») движется со скоростью \bar{u} перпендикулярно грани S_4 . В то же самое время непрерывно идет дождь, каждая капля которого имеет скорость \bar{v} (вектор \bar{v} не обязательно направлен вертикально вниз – дождь может быть и косым – рис.1).

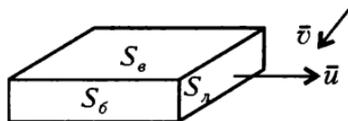


Рис. 1

Количество дождевых капель в единице объема равно k . Спрашивается: сколько капель N попадет на параллелепипед за то время, что он передвинется на расстояние l , и при каком значении скорости \bar{u} эта величина N будет наименьшей?

§2. Приступаем к решению

Введем в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$: ось Oz направим вертикально вниз, ось Ox – по направлению вектора \bar{u} а ось Oy – перпендикулярно плоскости Oxz , причем так, чтобы проекция вектора скорости падающих дождевых капель \bar{v} на ось Oy была неотрицательна (рис.2).

Так как вектор \bar{v} задан, можно считать, что известны все три его проекции на оси координат. Обозначим их v_x, v_y и v_z . Что можно сказать об этих проекциях? Разумеется, $v_y \geq 0$ (так выбрана ось Oy). Кроме того, $v_z > 0$ (дождь

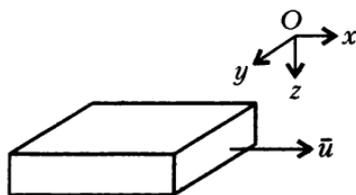


Рис.2

может идти только сверху вниз). А вот величина v_x может быть как положительной (попутный дождь), так и отрицательной (встречный дождь), а то и вообще равняться нулю.

Будем решать задачу в системе отсчета, связанной с параллелепипедом, т.е. считаем его неподвижным. Тогда дождевые капли в этой системе отсчета получают скорость $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$. Проекции вектора \vec{w} на оси координат будут равны $w_x = v_x - u$, $w_y = v_y$, $w_z = v_z$ (u — это длина вектора \vec{u}). Требуется определить, сколько капель N упадет на параллелепипед за время $\tau = l/u$, и при каком u значение N будет наименьшим.

Понятно, что за время τ на параллелепипед упадут все капли, отстоящие от граней параллелепипеда на расстояние, не

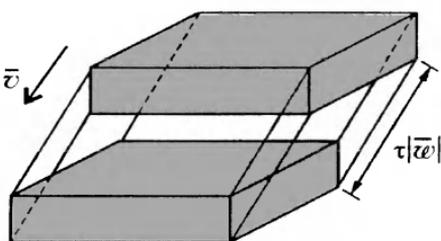


Рис. 3

большее, чем $\tau|\vec{w}|$, в направлении, противоположном вектору \vec{w} , т.е. все капли, расположенные внутри объема тела, изображенного на следующем рисунке 3.

Как найти объем этого тела? Нетрудно заметить, что оно, в свою очередь, состоит из трех параллелепипедов

(правда, на этот раз не прямоугольных), площади оснований которых равны S_6, S_8 и S_n , а высоты — абсолютным величинам проекций вектора $\tau\vec{w}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно. Поэтому объем тела равен:

$$\tau(|w_x|S_n + |w_y|S_6 + |w_z|S_8) = \tau(|v_x - u|S_n + v_yS_6 + v_zS_8)$$

(здесь мы отбросили знаки абсолютной величины во втором и третьем слагаемых, потому что выше убедились, что они всегда неотрицательны).

Искомое количество N попавших на поверхность параллелепипеда капель равно:

$$\tau k (|v_x - u|S_n + v_yS_6 + v_zS_8).$$

Учитывая, что $\tau = l/u$, получаем зависимость N от u :

$$N = kl \frac{|v_x - u|S_n + v_yS_6 + v_zS_8}{u}.$$

Теперь найдем такое u , при котором N будет минимально.

§3. Продолжаем решение

Поскольку значения k и l постоянны, будем для удобства оперировать величиной:

$$\psi = \frac{N}{kl} = \frac{|v_x - u|S_\lambda + v_y S_\delta + v_z S_\theta}{u}.$$

Рассмотрим два случая:

1. $v_x \leq 0$ (встречный дождь или, в крайнем случае, «нейтральный»). В этом случае $v_x - u < 0$ и потому $|v_x - u| = u - v_x$, так что

$$\psi = \frac{|v_x - u|S_\lambda + v_y S_\delta + v_z S_\theta}{u} = S_\lambda + \frac{-v_x S_\lambda + v_y S_\delta + v_z S_\theta}{u}.$$

Поскольку $v_x \leq 0$, числитель последней дроби положителен (в нем все слагаемые отрицательны), поэтому функция $\psi(u)$ убывает на интервале $(0, +\infty)$. График зависимости ψ от u выглядит так (рис.4).

Очевидно, в данном случае сторонники «непоспешания» ошибаются: при встречном дожде чем быстрее бежишь, тем меньше намокнешь. Однако тут же открывается и

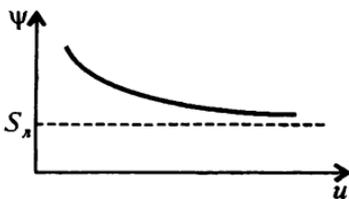


Рис. 4

другой, довольно неожиданный на первый взгляд факт: убывая, ψ , тем не менее, всегда остается *больше* S_λ и, соответственно, $N = kl\psi$ больше $N = klS_\lambda$ при любом u . Это значит, что с какой скоростью ни беги (хоть пулей лети!), все равно «минимальная доза» дождя, равная klS_λ гарантирована. Впрочем, поразмыслив, нетрудно найти задним числом объяснение этому кажущемуся парадоксу: если параллелепипед и впрямь движется столь стремительно, то капли дождя по сравнению с ним практически неподвижны, и потому параллелепипед как бы «прорубает проход» в застывшей дождевой «среде», собирая на себя все капли, встречающиеся на пути.

2. $v_x > 0$ (попутный дождь). Здесь придется рассмотреть два интервала:

1) $0 < u \leq v_x$. Тогда $|v_x - u| = v_x - u$, и

$$\psi = \frac{v_x S_\lambda + v_y S_\delta + v_z S_\theta}{u} - S_\lambda.$$

Эта функция убывает на интервале $(0, v_x]$ и достигает минимума

при $u = v_x$:

$$\Psi_{\min} = \frac{v_y S_n + v_z S_\theta}{u}.$$

2) $u > v_x$. Тогда $|v_x - u| = u - v_x$, и

$$\Psi = S_n + \frac{-v_x S_n + v_y S_\theta + v_z S_\theta}{u}.$$

Здесь уже нельзя сразу сказать, как ведет себя Ψ с возрастанием u . Это зависит от числителя дроби $A = -v_x S_n + v_y S_\theta + v_z S_\theta$. Если $A > 0$, то $\Psi(u)$ – убывающая функция на участке

$(v_x, +\infty)$; если $A < 0$ (то возрастающая на том же интервале, а если $A = 0$, то $\Psi = S_n = \text{const}$ на всем интервале.

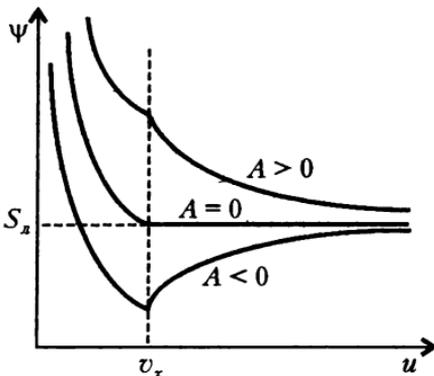


Рис. 5

Графики зависимости $\Psi(u)$ для всех $u \in (0, +\infty)$ приведены на рисунке 5.

Видно, что на участке от 0 до v_x кривые имеют схожий вид для всех трех случаев ($A > 0$, $A = 0$, и $A < 0$), а после излома при $u = v_x$ – различны.

Что из этого следует? А то, что аргументы сторонников совершенно неправдоподобной теории «медленной ходьбы» при попутном дожде оказываются в некоторых случаях неожиданно сильными и осмысленными, но подробнее об этом – в §4.

§4. Выводы

Наконец, проанализировав результаты расчетов и нарисованные по ним графики, мы можем обстоятельно ответить на вопрос, как убежать от дождя.

Итак, если дождь встречный или «нейтральный», то надо бежать к укрытию как можно скорее. Если же дождь попутный, то сначала необходимо мысленно оценить величину $A = -v_x S_n + v_y S_\theta + v_z S_\theta$. Если окажется, что $A > 0$, то и в этом случае желательно поторопиться. Если $A = 0$, то можно передвигаться с любой скоростью, не меньшей v_x – намокнете вы одинаково. Ну, а если $A < 0$, то следует бежать со скоростью, строго равной v_x – тогда вы намокнете меньше всего.

Если, скажем, $v_y = 0$ (боковая составляющая ветра отсутствует), то неравенство $A < 0$ равносильно неравенству $v_x S_d > v_z S_g$. Поскольку для высокого худого человека S_d значительно больше S_g , это неравенство может выполняться при относительно небольших, «пешеходных» v_x . Такой человек, если он будет двигаться к укрытию так, чтобы траектории капель казались ему вертикальными, имеет шанс вообще остаться почти сухим. В народе это называется «проскочить между каплями».

Но лучше всего иметь с собой зонтик. Решение наше, как ни крути, все же приблизительное, тем более, что на параллелепипед мы не слишком-то похожи. А на что? И здесь вспоминается легенда о великом российском математике П.Л.Чебышёве. Однажды он, находясь в Париже, решил прочесть лекцию о математическом моделировании одежды. Послушать знаменитого ученого собрались лучшие модельеры Франции. Однако после первой же его фразы: «Предположим, что тело человека имеет форму шара...», слушатели бросились наутек.

Но мы так делать не будем и рискнем пойти по стопам П.Л.Чебышёва, став на время шарообразными. Итак, пусть со скоростью u движется не параллелепипед, а шар радиусом R . Прочие данные оставим те же. Что получится, и главное – какие из этого выводы? Попробуйте выяснить сами, а затем сверьте ваш результат с приводимым ниже решением.

Решение задачи о шарообразном беглеце

Связав систему отсчета с шаром, мы получим те же проекции скоростей на оси координат, что и в случае с параллелепипедом: $w_x = v_x - u$, $w_y = v_y$, $w_z = v_z$, а абсолютное числовое значение скорости «набегания» дождя на шар определяется как диагональ прямоугольного параллелепипеда (рисовать ничего не будем – и так все ясно):

$$w = \sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Когда же мы приступим к определению объема тела, содержащего все капли дождя, успевшие упасть на поверхность шара за время $\tau = l/u$, то эта задача лишь на первый взгляд может показаться нам сложной, но на самом деле она предельно проста – проще даже, чем для параллелепипеда! Дело в том, что шар со всех сторон *выглядит одинаково* – как круг, поэтому искомый объем есть объем цилиндра с основанием, представляющем собой круг радиусом R , и высотой, равной $w\tau = wl/u$. Поэтому число упавших на поверхность шара

капель N равно:

$$N = \frac{k\pi R^2 \omega l}{u} = \pi R^2 k l \frac{\sqrt{(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}}{u}.$$

Опять же, как и прежде, отбросив постоянный множитель перед дробью, получаем функцию, минимум которой следует найти. Однако изрядно смущает знак радикала, который может затруднить работу. Но и здесь выход имеется: и подкоренное выражение, и знаменатель дроби заведомо положительны, поэтому можно искать минимум не самой дроби, а ее *квадрата*, который, естественно, будет достигаться при том же самом значении u . Таким образом, задача свелась к поиску такого положительного u , при котором величина:

$$\Psi = \frac{(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}{u^2}$$

имеет минимум. Проще всего здесь раскрыть в числителе скобки и почленно поделить числитель на знаменатель:

$$\Psi = 1 - \frac{2v_x}{u} + \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{u^2}.$$

Далее удобно вынести за скобки множитель $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ а из того, что останется, выделить полный квадрат. В результате несложных, хотя и довольно громоздких, преобразований получим:

$$\Psi = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \left[\left(\frac{1}{u} - \frac{v_x}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \right)^2 + \frac{v_y^2 + v_z^2}{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^2} \right].$$

Теперь все видно, как на ладони: значение Ψ минимально, когда выражение в круглых скобках, возводимое в квадрат, возможно ближе к нулю. При этом если $v_x \leq 0$ (встречный или «нейтральный» дождь), то выражение тем ближе к нулю, чем больше u , т.е. в таком случае надо бежать со всех ног. Для положительного же существует такое u , при котором выражение в скобках строго равно нулю, т.е. оптимальная скорость продвижения по уклону:

$$u = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{v_x}.$$

Какое превосходное совпадение с результатами, полученными для параллелепипеда (разумеется, качественное, а не количе-

ственное, чего и ожидать было нельзя)! Таким образом, несмотря на очевидную грубость наших упрощений, общая идея просматривается весьма четко. Да и на душе становится спокойней: две опоры надежнее одной, как утверждал пусть и не математик, но тоже великий мыслитель Козьма Прутков.

ПРОБЛЕМЫ С ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ, или «АУ, ПРОГРАММИСТЫ!»

Когда-то в одном конкурсе была предложена такая задача:

В вершинах куба разместили точечные грузы с массами 1, 2, ..., 8 г. Может ли общий центр тяжести этих грузов совпасть с центром куба?

Ответ: может. Годится, например, такое размещение грузов, как на рисунке 1. Но как убедиться, что оно действительно удовлетворяет условию? Об этом поговорим чуть позже.

Пока же займемся вполне естественным обобщением данной задачи, а именно: если разместить в вершинах некоторого правильного многогранника грузы массами 1, 2, 3 и т.д. граммов, то сможет ли центр тяжести системы грузов совпасть с центром многогранника?

Оказывается, в большинстве случаев (да что там темнить – скажем прямо: во всех, кроме одного!) можно ответить на этот вопрос без утомительного перебора, основываясь на одном весьма важном свойстве центра тяжести любой системы точечных грузов. Он заключается в следующем. Проведем любую плоскость через центр тяжести такой системы. Далее для всех грузов, находящихся по одну сторону от такой плоскости, найдем произведение массы груза на его расстояние до плоскости (иногда это произведение называют статическим моментом). Далее найдем сумму всех этих произведений. Потом те же операции сделаем для грузов, оказавшихся по другую сторону от плоскости. Сумма произведений для них окажется такой же! Доказательство сего факта приводить не буду (кому интересно – посмотрите в любой справочник, где математически обосновывается понятие центра тяжести). Лучше обратите внимание: грузы, попавшие (случайно или намеренно) на проведенную плоскость, из рассмотрения выпадают и на суммы произведений не влияют. Это позволяет во многих случаях,

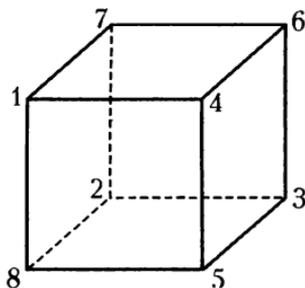


Рис. 1

удачно подбирая плоскость, получать полезные соотношения между массами и местоположениями грузов.

Верно и обратное: если для какой-либо плоскости указанные суммы произведений равны, то плоскость проходит через центр тяжести.

Сформулированное свойство центра тяжести для упрощения дальнейших рассуждений будем обозначать его аббревиатурой «СЦТ».

На основании СЦТ прежде всего убедимся, что при указанном выше расположении грузов в вершинах куба их суммарный центр тяжести действительно совпадает с центром куба. Кстати сказать, это изящное рассуждение, основанное на СЦТ (авторское было гораздо более громоздким) предложил Анатолий Павлович Савин – известный московский математик, активный популяризатор и педагог. Проведем плоскость, проходящую на равном расстоянии между любыми двумя противоположными гранями куба. Заметим, что, во-первых, расстояния от всех вершин до плоскости одинаковы, а во-вторых, суммы масс грузов в вершинах любых двух противоположных граней тоже одинаковы (равны 18 г – проверьте и убедитесь!). Поэтому вышеупомянутые суммы произведений оказываются равны. Следовательно, проведенная плоскость проходит через центр тяжести системы грузов. Проведем теперь плоскость, параллельную другой паре противоположных граней, а потом и третьей. Центр тяжести, согласно тому же СЦТ, лежит и на них. Но все три плоскости, очевидно, пересекаются в центре куба, так что и центр тяжести лежит там же (куда ж ему, бедному, деваться!). Всё.

Позже было замечено, что ничуть не хуже было бы проводить плоскости не параллельно граням куба, а «наискосок»: скажем, через грузы массами 1, 8, 3 и 6 г. Тогда четыре груза сразу попадают на плоскость, и по обе стороны от нее остаются всего по два груза – а остальное то же самое. Во всяком случае, трех разных плоскостей вполне достаточно, ибо точка их пересечения – единственная: центр куба.

Ну а теперь займемся анализом обобщенной задачи, последовательно рассматривая остальные правильные многогранники по мере увеличения количества их вершин (интуиция подсказывает, что чем больше вершин, тем это будет сложнее – и в данном случае она не обманывает). Итак...

1. *Тетраэдр* (всего лишь 4 вершины – рис.2). Выберем любые две вершины и проведем плоскость перпендикулярно отрезку, их соединяющему (то есть, собственно, ребру тетраэдр-

ра), чтобы она при этом прошла через центр тетраэдра. Легко видеть, что остальные две вершины тетраэдра окажутся как раз на плоскости. Выбранные же две вершины, очевидно, лежат на равных расстояниях от плоскости по разные стороны от нее. Но тогда из СЦТ следует, что и массы грузов в этих вершинах должны быть равны! Однако последнее исключено, поскольку массы всех грузов различны. Так что для тетраэдра центр масс системы грузов *никак не может совпасть с его геометрическим центром.*

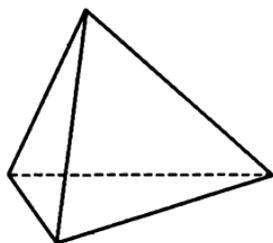


Рис. 2

2. Октаэдр (6 вершин – рис.3). Также выберем две его вершины, но уже не любые, а противоположные и проведем плоскость, как и прежде, перпендикулярно отрезку, их соединяющему, чтобы она при этом прошла через центр октаэдра. Ясно, что остальные 4 вершины окажутся на плоскости, и далее, аналогично случаю с тетраэдром, получаем, что массы грузов в двух выбранных противоположных вершинах должны быть равны, что недопустимо. Посему и для октаэдра ответ отрицательный.

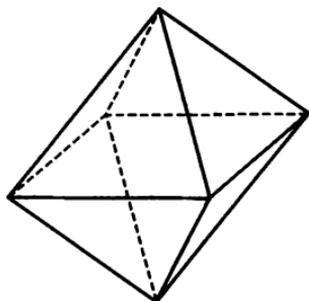


Рис. 3

3. Икосаэдр (уже 12 вершин – рис.4). Количество перешло в качество: хотелось бы и здесь провести какую-нибудь хитрую плоскость, чтобы все вершины, кроме двух противоположных, попали на нее, но не тут-то было! Тем не менее, как говорил незабвенный граф де ла Фер (он же мушкетер Атос), кто посмеет сказать, что упорство – не добродетель? Так что выберем все-таки пару противоположных вершин. Пусть в них расположены грузы массами m_1 и m_2 граммов. Проведем плоскость перпендикулярно соединяющему их отрезку, проходящую через центр многогранника. Жаль (еще раз), что она не проходит ни через одну из десяти оставшихся вершин. Тем не менее, эти 10 вершин можно разбить на две группы по 5 вершин, лежащих по обе стороны от плоскости. При этом все 10 вершин

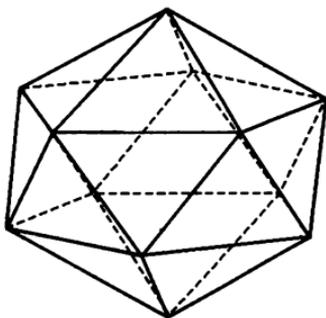


Рис. 4

лежат на одинаковом расстоянии от плоскости. Пусть суммарная масса грузов в пяти вершинах, расположенных по ту же сторону от плоскости, что и груз m_1 , равна M_1 граммов, а суммарная масса грузов в других пяти вершинах равна M_2 граммов.

Что ж, подготовительные рассуждения завершены, а теперь – внимание! – решающий удар. Оказывается, расстояния (естественно, одинаковые) от двух вершин с грузами m_1 и m_2 до проведенной плоскости ровно в $\sqrt{5}$ раз больше, чем расстояния до той же плоскости от остальных десяти грузов! Как это доказать? Не будем скрывать – дело громоздкое, но, по сути, в нем нет ничего особенного: добросовестная тригонометрия в приложении к стереометрии. Прошу верить на слово, а кто захочет проверить – милости просим. Если кого-то смущает квадратный корень именно из 5, то тому объяснение простое: оказывается, синус 18° равен $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, а углы, кратные 18° , будут встречаться в преобразованиях неоднократно.

Итак, если центр тяжести системы грузов совпадает с центром икосаэдра, то должно выполняться равенство:

$$m_1 + \sqrt{5}M_1 = m_2 + \sqrt{5}M_2$$

или, после преобразований:

$$m_1 - m_2 = \sqrt{5}(M_1 - M_2)$$

Так как все числа m_1, m_2, M_1 и M_2 – заведомо целые, то во избежание равенства рационального числа иррациональному должны выполняться равенства: $M_1 = M_2$ и $m_1 = m_2$. То есть опять-таки массы грузов в противоположных вершинах обязаны быть равны, что невозможно. Со скрипом, но и икосаэдр исследован.

4. *Додекаэдр* (вершин выше крыши, т.е. 20 – рис. 5). А вот с ним дело застопорилось. Выбор, как прежде, двух противоположных вершин ничего не дает, поскольку остальные вершины, если рассмотреть расстояния от них до плоскости, придется разбивать не на две, а на четыре группы, и аналогичного уравнения составить не удастся.

А если попробовать взять две противоположных грани и провести плоскость параллельно им на равном расстоянии? Тогда 10 вершин, не принадлежащих этим граням, тоже можно

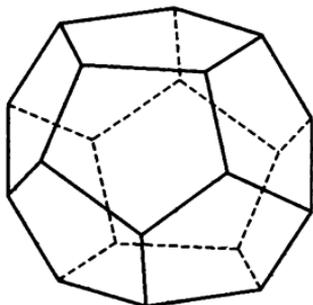


Рис. 5

разбить на две группы по 5 штук, и они также расположены на равном расстоянии до плоскости. При этом (та же стереометрическая тригонометрия!) расстояния от выбранных противоположных граней до плоскости больше расстояний до нее от оставшихся десяти вершин ровно в $(\sqrt{5} + 2)$ раз. Так что если обозначить суммы масс грузов, расположенных на выбранных противоположных гранях, через m_1 , m_2 граммов а суммы масс двух групп из остальных грузов через M_1 , M_2 граммов, то получаем близкое к знакомому нам уравнение:

$$m_1 + (\sqrt{5} + 2)M_1 = m_2 + (\sqrt{5} + 2)M_2$$

откуда следует, что $M_1 = M_2$ и $m_1 = m_2$. К величайшему сожалению, здесь речь идет не о массах двух противоположных грузов, а лишь о суммах масс сразу пяти грузов, так что получить определенный ответ (пусть и отрицательный) не удастся. Вот максимум, которого удалось достичь.

Похоже, ничего не остается, кроме как обратиться к достижениям научно-технического прогресса и воскликнуть, как во второй части заголовка: «Ау, программисты! Отзовитесь! Неужели вы, используя ваши любимые Delphi или C++, или еще что-нибудь «бронепробивное», не сможете выяснить, как обстоят дела со злосчастным додекаэдром, чтобы поставить жирную точку в этом вопросе? Уберите камень с души!».

При этом не требуется знание каких-либо геометрических параметров додекаэдра – ведь пары равенств $M_1 = M_2$ и $m_1 = m_2$ достаточно, чтобы организовать перебор. Более того, удобнее первое из них сложить со вторым и записать в виде: $M_1 + m_1 = M_2 + m_2$. Почему удобнее? А потому, что в последнем равенстве в каждой части стоит сумма масс грузов, расположенных по одну сторону от плоскости. А так как сумма масс всех 20 грузов равна $1 + 2 + \dots + 20 = 210$ г, то $M_1 + m_1 = M_2 + m_2 = 105$ (т.е. $210/2$). Так что задачу поиска размещения грузов в вершинах для программистов можно сформулировать следующим образом:

Можно ли разместить в вершинах додекаэдра грузы массами 1, 2, ..., 20 г таким образом, чтобы для некоторых трех пар противоположных граней выполнялись следующие условия:

1) суммы масс грузов в вершинах этих граней были равны между собой;

2) если провести через центр додекаэдра плоскость, параллельную этим граням, то сумма масс грузов в вершинах, расположенных по одну сторону от плоскости, равна 105 г.

Легко видеть, что первое условие проистекает из равенства $m_1 = m_2$, а второе – из равенства $M_1 + m_1 = M_2 + m_2 = 105$. А почему упомянуты лишь три пары противоположных граней (ведь в додекаэдре их шесть)? Да потому, что если для любых трех пар указанные условия окажутся выполнены, то для остальных пар они будут выполнены автоматически (ибо центр тяжести совпадет с точкой пересечения трех плоскостей, то есть с центром многогранника).

Согласитесь, уважаемые программисты, что задача стала вполне комбинаторно-переборной – как раз для компьютера. Ну, а обеспечить наиболее экономичный перебор – это уж ваши хитрости. Попробуйте, а?

Игорь Федорович Акулич

Королевские прогулки

Библиотечка «Квант». Выпуск 105

Приложение к журналу «Квант» №1/2008

Редактор *А.В.Жуков*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 90

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 4,5 печ.л. Тираж 3000 экз.

Заказ № 2140.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: admin@kvant.info

Отпечатано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г.Чехов Московской области

Сайт: www.chpk.ru.

E-mail:marketing@chpk.ru

Факс: 8(49672)6-25-36, факс: 8(499)270-73-00

Отдел продаж услуг многоканальный: 8(499) 270-73-59

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ книги
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков, В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Котылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Сморodinский*. Температура
13. *А.Е.Карпов, Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов, В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин, Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин*. Как превращаются вещества

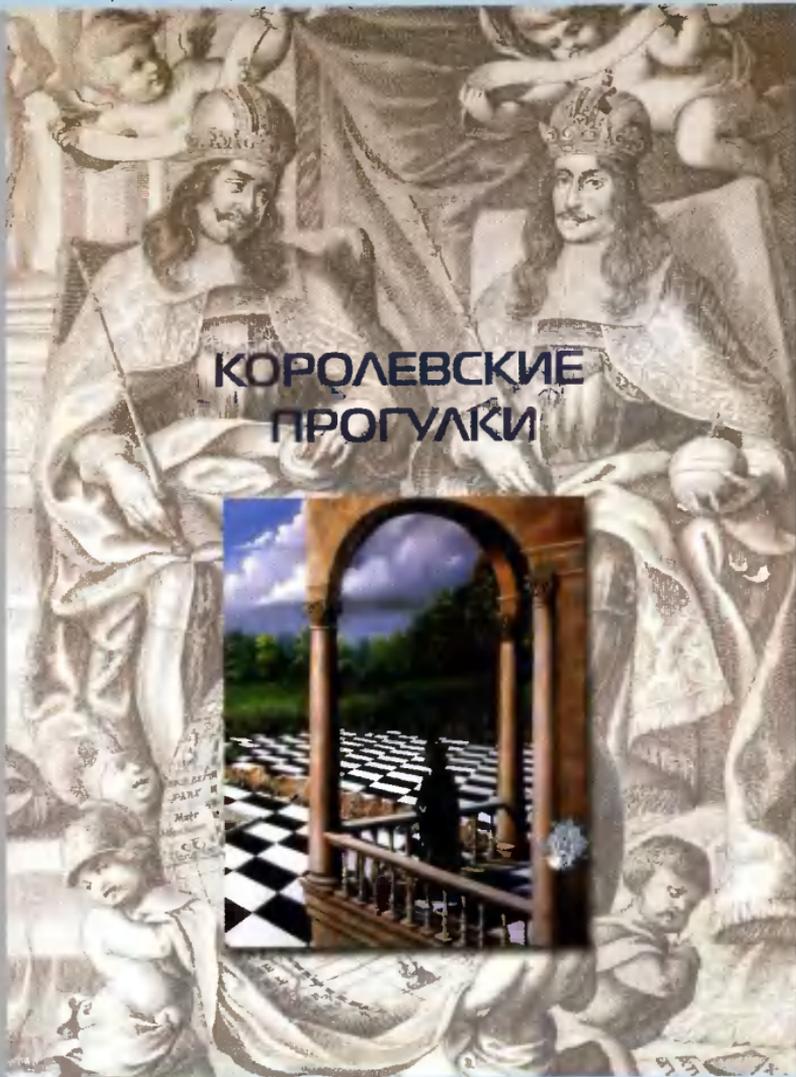
37. Г.С.Воронов. Штурм термоядерной крепости
38. А.Д.Чернин. Звезды и физика
39. В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев. Удивительная гравитация
40. С.С.Хилькевич. Физика вокруг нас
41. Г.А.Звенигородский. Первые уроки программирования
42. Л.В.Тарасов. Лазеры: действительность и надежды
43. О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов. Международные физические олимпиады школьников
44. Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский. Математика и спорт
45. Л.Б.Окунь. α , β , γ ... Z: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. Я.Е.Гегузин. Пузыри
47. Л.С.Марочник. Свидание с кометой
48. А.Т.Филиппов. Многоликий солитон
49. К.Ю.Богданов. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. Х.Рахлис. Физика в ванне
52. В.М.Липунов. В мире двойных звезд
53. И.К.Кикоин. Рассказы о физике и физиках
54. Л.С.Понтрягин. Обобщения чисел
55. И.Д.Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах
57. А.А.Силин. Трение и мы
58. Л.А.Ашкинази. Вакуум для науки и техники
59. А.Д.Чернин. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. М.Б.Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс
62. Р.Фейнман. Характер физических законов
63. Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов. Удивительная физика
64. А.Н.Колмогоров. Математика – наука и профессия
65. М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. Р.Фейнман. КЭД – странная теория света и вещества
67. Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов. Драма идей в познании природы
68. И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
69. М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева. Электричество в живых организмах
70. А.Л.Стасенко. Физика полета
71. А.С.Штейнберг. Репортаж из мира сплавов
72. В.Р.Полищук. Как исследуют вещества
73. Л.Кэрролл. Логическая игра
74. А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов. Физика в мире полимеров
75. А.Б.Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких
76. В.С.Гетман. Внуки Солнца
77. Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков. Математические бильярды

78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники
85. *Г.Гамов*. Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак*. Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий*. Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли*. Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко*. Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1. Под редакцией Н.Б.Васильева
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин*. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2. Под редакцией Н.Б.Васильева
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот*. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов*. Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох*. Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров*. Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак*. Арифметика
103. *Я.А.Сморodinский*. Температура
104. *А.Н.* . История науки в коллекции монет

Индекс 70465



Библиотечка КВАНТ



ВЫПУСК

105